# Beiträge

zur

# Theorie der Thetafunctionen von mehreren Variablen.

---

Inaugural-Dissertation

zur

**Erlangung der Doctorwürde**

der

hohen philosophischen Facultät der Universität Marburg

eingereicht von

**Friedrich von Dalwigk.**

aus Kassel.

---

MARBURG.

1891.

Separat-Abdruck aus: Nova Acta der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. LVII.

# Erster Theil.

Ausgehend von der Betrachtung des elliptischen Normalintegrals der zweiten Gattung als Function des Integrals erster Gattung kann man zu einer Einführung der Jakobi'schen Thetafunctionen gelangen. Das Problem lässt sich aber auch so fassen, dass das ganze Verfahren auf Abel'sche Integrale beliebigen Geschlechts übertragbar wird und die Thetafunctionen von $p$ Veränderlichen liefert. Man braucht dazu nur zu fragen: Wie muss eine eindeutige Function einer Variablen beschaffen sein, damit sie durch Einsetzen des Normalintegrals erster Gattung an die Stelle der unabhängigen Variablen zu einem Integral zweiter Gattung mit möglichst einfachen Eigenschaften wird. Diese Fragestellung ist auf den Fall $p > 1$ leicht zu verallgemeinern und führt auf Functionen von $p$ Veränderlichen.

Im allgemeinen Fall legt man zur Vereinfachung der Ausdrucksweise am besten eine Riemann'sche Fläche zu Grunde; man kann natürlich auch mit den von Clebsch und Gordan benutzten Hilfsmitteln auskommen.

**§ 1.** Zunächst muss kurz auf den Fall der elliptischen Integrale eingegangen werden. Das Normalintegral der ersten Gattung sei so gewählt, dass es am Querschnitt $a$ den Periodicitätsmodul $+1$ habe, sein Periodicitätsmodul an $b$ werde mit $\omega$ bezeichnet ($\omega$ hat dann einen wesentlich positiven imaginären Theil). Eine Function $f(v)$, welche durch Einsetzen dieses Integrals $u$ an Stelle der unabhängigen Variablen zu einer Function des Ortes in der Fläche mit dem Charakter eines Integrals zweiter Gattung wird, muss die Periodeneigenschaften

$$f(v+1) = f(v) + A \qquad f(v+\omega) = f(v) + B$$

und für endliches $v$ nur ausserwesentlich singuläre Punkte haben, welche dann innerhalb eines Parallelogramms mit den Seiten 1 und $\omega$ nur in endlicher

Anzahl auftreten können. Es genügt völlig, wenn man Functionen bilden kann, für welche $A$ den Werth 0 hat und welche nur einfache Unendlichkeitspunkte besitzen, und zur Bildung von Normalintegralen zweiter Gattung ist es wünschenswerth, Functionen mit nur einem einfachen Unendlichkeitspunkt innerhalb des Parallelogramms mit den Seiten 1 und $\omega$ aufzustellen.

Ist nun $\Theta(v)$ eine ganze transcendente Function mit den Eigenschaften

$$\Theta(v+1) = c.\Theta(v) \qquad \Theta(v+\omega) = e^{\alpha+\beta v}.\Theta(v)$$

und mit Nullstellen beliebiger Ordnungen, dann ist $\frac{dlg\,\Theta(v)}{dv} = \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}$ mit einem beliebigen constanten Factor multiplicirt eine Function mit einfachen Unendlichkeitspunkten und mit Periodeneigenschaften, wie sie von $f(v)$ verlangt wurden. Und während man für $f(v)$ aus den gestellten Bedingungen nicht gut direct einen allgemein giltigen analytischen Ausdruck aufstellen kann, gelingt dies für $\Theta(v)$ bei passender Specialisirung der Constanten $c, \alpha, \beta$ sofort.

Zunächst nimmt man $c$ gleich $+1$ oder $-1$, um eine einfach periodische Function zu erhalten. Die Function mit den Eigenschaften

$$\Theta(v+1) = (-1)^g.\Theta(v) \qquad \Theta(v+\omega) = e^{\alpha+\beta v}.\Theta(v)$$

hat — wenn sie überhaupt existirt — die Ausdrucksform

$$\Theta(v) = \sum_{-\infty,+\infty}^{n} A_n.e^{+\pi i(2n+g).v}$$

und ist eindeutig in dieser Weise darstellbar; daher ist die Forderung

$$\Theta(v+\omega) = e^{\alpha+\beta\omega}.\Theta(v)$$

oder

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{n} A_n.e^{+\pi i(2n+g)\omega}.e^{+\pi i(2n+g)v} = e^{\alpha+\beta v}.\sum_{-\infty,+\infty}^{n} A_n.e^{+\pi i(2n+g)v}$$

gewiss nur dann erfüllbar, wenn $\beta$ ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$, etwa $-2\pi i\delta$ ist (das negative Zeichen wird hier gleich gewählt, weil sich dann später $\delta$ als positiv ergeben wird und so eine nachträgliche Aenderung in der Bezeichnung erspart bleibt). Und man erhält aus der Bedingung eine Beziehung zwischen $A_n$ und $A_{n+\delta}$, aus welcher leicht für positives wie für negatives $m$ die Formel

$$A_{k+m\delta} = e^{-m.\alpha+\pi i m(2k+g)\omega+\pi i(m^2-m)\delta.\omega}.A_k$$

folgt. Zur Vereinfachung kann man $\alpha$ gleich $-\pi i\delta\omega$ oder etwas allgemeiner $\alpha = -\pi i\delta\omega + h\pi i$ annehmen*). Dann findet man

$$\Theta(v) = \sum_{-\infty,+\infty}^{k} A_k \cdot \sum_{-\infty,+\infty}^{m} (-1)^{m.h} \cdot e^{+\pi i\delta m^2\omega + \pi i m(2k+g)\omega + \pi i(2k+2m\delta+g)v},$$

wobei für $k$ ein Restsystem nach dem Modul $|\delta|$ zu setzen ist. Weil $\omega$ positiv imaginären Theil hat, folgt schon aus dem Quotienten zweier Glieder der Reihe mit dem Summationsindex $m$ $\delta > 0$ als nothwendig und hinreichend zur unbedingten Convergenz.

Für wesentlich positiven imaginären Theil von $\omega$ und für positives $\delta$ existirt daher eine Function mit den Eigenschaften

$$\Theta(v+1) = (-1)^g \cdot \Theta(v) \qquad \Theta(v+\omega) = (-1)^h \cdot e^{-\pi i\delta(2v+\omega)} \cdot \Theta(v)$$

und zwar enthält sie homogen und linear $\delta$ willkürliche Constanten. Innerhalb des Parallelogramms mit den Seiten 1 und $\omega$ besitzt die Function $\delta$ Nullstellen, wie das Randintegral $\int \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} dv$ zeigt.

Eine solche Function heist Thetafunction der Ordnung $\delta$ und der Charakteristik $g, h$. Die Thetafunctionen erster Ordnung kann man durch Verfügung über die eine noch willkürliche Constante in folgender Weise definiren:

$$\vartheta_{g,h}(v) = \sum_{-\infty,+\infty}^{m} e^{+\pi i\omega(m+\frac{1}{2}g)^2 + 2\pi i(m+\frac{1}{2}g)(v+\frac{1}{2}h)}.$$

Die Nullstellen sind in der Form $\frac{(h+1)+(g+1)\omega}{2} + M + N.\omega$ enthalten, wie ein über die Begrenzung eines Parallelogramms mit den Seiten 1 und $\omega$ erstrecktes Integral zeigt, und wie man auch daraus schliessen kann, dass $\vartheta_{1,1}(v)$ eine ungerade Function ist und die übrigen sich darauf zurückführen lassen. Als Function des Normalintegrals erster Gattung $u$ hat $\frac{\vartheta'_{gh}(u+C)}{\vartheta_{gh}(u+C)}$ einen einfachen Unendlichkeitspunkt in der Fläche, den man durch passendes

---

*) Man kommt dadurch nicht etwa zu einer specielleren Functionsklasse, denn wenn $\Theta(v)$ die Eigenschaften

$$\Theta(v+1) = (-1)^g \cdot \Theta(v),\ \Theta(v+\omega) = (-1)^h \cdot e^{-\pi i\delta\omega - 2\pi i\delta v} \cdot \Theta(v)$$

hat, so hat

$$\Theta\left(v - \frac{\alpha}{2\pi i\delta} - \frac{\omega}{2} - \frac{h}{2\delta}\right) = \psi(v)$$

die Eigenschaften

$$\psi(v+1) = (-1)^g \psi(v),\ \psi(v+\omega) = e^{\alpha - 2\pi i\delta v} \cdot \psi(v).$$

$C$ an eine beliebige Stelle bringen kann; die Function ist ein einfaches Integral zweiter Gattung mit einem verschwindenden Periodicitätsmodul am Querschnitt $a$.

Aber zu einer Darstellung des Legendre-Jakobi'schen Normalintegrals der zweiten Gattung als Function des Integrals erster Gattung gelangt man so nicht, weil jenes Integral kein einfaches Integral ist, sondern in den beiden Blättern der Fläche im Unendlichen in erster Ordnung unendlich wird. — Die Thetafunctionen Jakobi's als Functionen des Integrals

$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2.z^2)}}$$

mit den Periodicitätsmoduln $4K, 2iK'$ sind in der Fläche Functionen zweiter Ordnung, sie besitzen je zwei Nullstellen. Darauf beruht ihre einfache Beziehung zu den Functionen $\sin \mathrm{am}\, w$, $\cos \mathrm{am}\, w$, $\triangle \mathrm{am}\, w$ und dem gebräuchlichen Normalintegral zweiter Gattung.

**§ 2.** Allgemein kann man nun eine Funktion von $p$ unabhängigen Veränderlichen suchen, die durch Einsetzen der $p$ Normalintegrale erster Gattung vom Geschlechte $p$ an die Stelle der unabhängigen Variablen zu einem möglichst einfachen Integral zweiter Gattung in der zu Grunde gelegten Riemann'schen Fläche wird. Die Normalintegrale erster Gattung seien durch folgendes Schema der Periodicitätsmoduln charakterisirt:

| | $a_1$ | $a_2$ | $\ldots$ | $a_p$ | $b_1$ | $b_2$ | $\ldots$ | $b_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | $+1$ | $0$ | $\ldots$ | $0$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\ldots$ | $a_{1p}$ |
| $u_2$ | $0$ | $+1$ | $\ldots$ | $0$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\ldots$ | $a_{2p}$ |
| $\ldots$ | | | | | | | | |
| $u_p$ | $0$ | $0$ | $\ldots$ | $+1$ | $a_{p1}$ | $a_{p2}$ | $\ldots$ | $a_{pp}$, |

dann ist $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ und $\sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} a_{\mu\nu} . x_\mu . x_\nu$ hat bei reellem $x_1 \ldots x_p$ stets einen von Null verschiedenen und positiven imaginären Bestandtheil.

Aus einer eindeutigen Funktion $f(v_1 \ldots v_p)$ mit den Periodeneigenschaften

$$\begin{array}{l|l} f(v_1+1, v_2 \ldots v_p) = f(v_1, v_2 \ldots v_p)+A_1 & f(v_1+a_{11} \ldots v_p+a_{p1}) = f(v_1 \ldots v_p)+B_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(v_1 \ldots v_{p-1}, v_p+1) = f(v_1 \ldots v_p)+A_p & f(v_1+a_{1p} \ldots v_p+a_{pp}) = f(v_1 \ldots v_p)+B_p \end{array}$$

würde man durch Einsetzen der Integrale $u_1 \ldots u_p$ ein Integral zweiter Gattung erhalten, wenn diese Function in der Riemann'schen Fläche nur

ausserwesentlich singuläre Punkte (in endlicher Zahl) hat. Für den vorliegenden Zweck der Bildung von möglichst einfachen Integralen zweiter Gattung als Funktionen von $u_1 \dots u_p$ genügt die Aufstellung von Functionen $f(v_1 \dots v_p)$ mit verschwindenden $A_1 \dots A_p$. Nach Analogie mit den Betrachtungen für $p = 1$ sucht man zunächst eine für jedes endliche Werthsystem $v_1 \dots v_p$ endliche und stetige eindeutige Funktion $\Theta(v_1 \dots v_p)$ mit den Periodeneigenschaften

$$\begin{array}{l|l}
\Theta(v_1+1, v_2 \dots v_p) = (-1)^{g_1} \cdot \Theta(v_1 \dots v_p) & \Theta(v_1+a_{11}, \dots v_p+a_{p1}) = e^{\alpha_1 + \beta_{11} v_1 + \dots \beta_{p1} \cdot v_p} \cdot \Theta(v_1 \dots v_p) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\Theta(v_1, v_2 \dots, v_p+1) = (-1)^{g_p} \cdot \Theta(v_1 \dots v_p) & \Theta(v_1+a_{1p}, \dots v_p+a_{pp}) = e^{\alpha_p + \beta_{1p} v_1 + \dots \beta_{pp} \cdot v_p} \cdot \Theta(v_1 \dots v_p).
\end{array}$$

Jede partielle logarithmische Derivirte derselben besitzt den von der Function $f(v_1 \dots v_p)$ verlangten Charakter. Nach allgemeinen Sätzen muss $\Theta(v_1 \dots v_p)$ die Entwickelungsform

$$\Theta(v_1 \dots v_p) = \sum_{-\infty,+\infty}^{n_1} \dots \sum_{-\infty,+\infty}^{n_p} A_{n_1 \dots n_p} \cdot e^{+2\pi i \sum_{1,p}^{\mu} (n_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) v_\mu}$$

haben. Aus

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{n_1} \dots \sum_{-\infty,+\infty}^{n_p} A_{n_1 \dots n_p} \cdot e^{+2\pi i \sum_{1,p}^{\mu} (n_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) \cdot v_\mu + 2\pi i \sum_{1,p}^{\mu} (n_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) \cdot a_{\mu\nu}} =$$

$$= e^{\alpha_\nu + \beta_{1\nu} \cdot v_1 + \dots \beta_{p\nu} \cdot v_p} \cdot \sum_{-\infty,+\infty}^{n_1} \dots \sum_{-\infty,+\infty}^{n_p} A_{n_1 \dots n_p} \cdot e^{+2\pi i \cdot \sum_{1,p}^{\mu} (n_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) \cdot v_\mu}$$

erkennt man leicht, dass alle $\beta_{\mu\nu}$ ganze Vielfache von $2\pi i$ sein müssen, was natürlich nur eine nothwendige und noch keine hinreichende Bedingung für die Existenz von $\Theta(v_1 \dots v_p)$ ist.*)

---

*) Z. B. ergiebt sich aus der Betrachtung des über alle Querschnittränder der Riemann'schen Fläche genommenen Integrals $\frac{1}{2\pi i} \cdot \int d lg\, \Theta(u_1 \dots u_p)$, dessen Werth sich leicht als $\frac{-1}{2\pi i} \cdot (\beta_{11} + \beta_{22} + \dots \beta_{pp})$ finden lässt, dass die ganze Zahl $\frac{1}{2\pi i} \cdot (\beta_{11} + \beta_{22} + \dots + \beta_{pp})$ negativ sein muss, weil das Integral die Anzahl der Nullstellen der nach den Voraussetzungen in der Fläche nicht unendlichen Funktion $\Theta(u_1 \dots u_p)$ angiebt. (Der Fall $\beta_{11} + \beta_{22} + \dots + \beta_{pp} = 0$ ist ohne Interesse, weil dann die Functionen $\frac{\partial lg\, \Theta(v_1 \dots v_p)}{\partial u_\nu}$ nach Einsetzung der $u_1 \dots u_p$ zu Integralen erster Gattung mit verschwindenden Periodicitätsmoduln an $a_1 \dots a_p$, d. h. zu Constanten würden.) Der Satz zeigt auch, dass man wirklich von der Function $\Theta(v_1 \dots v_p)$ zu Integralen zweiter Gattung gelangt.

Recursionsformeln für die Coefficienten $A_{n_1 \dots n_p}$, ähnlich wie bei der speciellen Betrachtung des Falles $p = 1$, sind nun aber noch nicht zu erhalten, wenn man nicht noch eine weitere Verfügung über die $\beta_{\mu\nu}$ macht. Erst die Annahme $\beta_{\mu\nu} = 0\,(\mu \gtrless \nu)$ giebt ein brauchbares Resultat. Die Gleichung

$$\Theta(v_1 + a_{1\nu} \dots v_p + a_{p\nu}) = e^{\alpha_\nu + \beta_{\nu\nu} \cdot v_\nu} \cdot \Theta(v_1 \dots v_p)$$

liefert, wenn man $\beta_{\nu\nu} = -2\pi i \delta_\nu$ setzt, die Bedingung

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{n_1} \dots \sum_{-\infty,+\infty}^{n_p} A_{n_1 \dots n_p} \cdot e^{2\pi i \cdot \sum_{1,p}^{\mu} (n_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) v_\mu + 2\pi i \cdot \sum_{1,p}^{\mu} (n_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) \cdot a_{\mu\nu}} =$$

$$= e^{\alpha_\nu - 2\pi i \delta_\nu \cdot v_\nu} \cdot \sum_{-\infty,+\infty}^{n_1} \dots \sum_{-\infty,+\infty}^{n_p} A_{n_1 \dots n_p} \cdot e^{+ 2\pi i \sum_{1,p}^{\mu} (n_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) v_\mu},$$

woraus sofort folgt:

$$A_{n_1 \dots n_\nu \dots n_p} \cdot e^{+ 2\pi i \sum_{1,p}^{\mu} (n_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) \cdot a_{\mu\nu}} = e^{+ \alpha_\nu} \cdot A_{n_1 \dots n_\nu + \delta_\nu \dots n_p}$$

oder für jedes ganzzahlige positive oder negative $m_\nu$:

$$A_{n_1 \dots n_\nu + m_\nu \cdot \delta_\nu \dots n_p} =$$

$$= e^{- m_\nu \cdot \alpha_\nu + 2\pi i m_\nu \cdot \sum_{1,p}^{\mu} (n_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) \cdot a_{\mu\nu} + \pi i m_\nu \cdot (m_\nu - 1) \cdot \delta_\nu \cdot a_{\nu\nu}} \cdot A_{n_1 \dots n_\nu \dots n_p}.$$

Hieraus kann man $A_{n_1 \dots n_\lambda + m_\lambda \cdot \delta_\lambda \dots n_\nu + m_\nu \cdot \delta_\nu \dots n_p}$ auf zwei Arten durch $A_{n_1 \dots n_\lambda \dots n_\nu \dots n_p}$ darstellen, beide führen zu verschiedenen Resultaten, wenn nicht $\delta_\lambda = \delta_\nu$ ist.

Daher ist $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_p = \delta$ eine weitere nothwendige Annahme, und es folgt dann leicht:

$$A_{k_1 + m_1 \delta \dots k_p + m_p \delta} =$$

$$= e^{- \sum_{1,p}^{\nu} m_\nu \cdot \alpha_\nu + 2\pi i \cdot \sum_{1,p}^{\nu} m_\nu \cdot \sum_{1,p}^{\mu} (k_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) a_{\mu\nu} + \pi i \delta \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} m_\mu \cdot m_\nu \cdot a_{\mu\nu} - \pi i \delta \cdot \sum_{1,p}^{\nu} m_\nu \cdot a_{\nu\nu}} \cdot A_{k_1 \dots k_p}.$$

Verfügt man über $\alpha_\nu$ noch in folgender Weise:

$$\alpha_\nu = -\pi i \delta a_{\nu\nu} + h_\nu \cdot \pi i, \qquad *)$$

wo $h_\nu$ eine ganze Zahl (etwa 0 oder $+1$) sei, so hat man

*) Das ist durchaus keine wesentliche Einschränkung, s. die Anmerkung von S. 225 (5).

$$A_{k_1+m_1\delta \ldots k_p+m_p\delta} =$$

$$= (-1)^{\sum_{1,p}^{\nu} h_\nu m_\nu} \cdot e^{+2\pi i \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} (k_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) m_\nu \cdot a_{\mu\nu} + \pi i \delta \cdot \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} m_\mu \cdot m_\nu \cdot a_{\mu\nu}} \cdot A_{k_1 \ldots k_p}.$$

Und weil sich schreiben lässt:

$$\Theta(v_1 \ldots v_p) = \sum_{}^{k_1} \ldots \sum_{}^{k_p} \left\{ \sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \ldots \sum_{-\infty,+\infty}^{m_p} A_{k_1+m_1\delta \ldots k_p+m_p\delta} \cdot e^{+2\pi i \cdot \sum_{1,p}^{\mu} (k_\mu + m_\mu \cdot \delta + \frac{1}{2} g_\mu) v_\mu} \right\}$$

wo jedes $k_\nu$ auf die Werthe $0, 1, 2 \ldots \delta - 1$, oder, wenn $\delta$ negativ wäre, auf $0, 1, 2 \ldots, -\delta - 1$ zu beschränken ist, so setzt sich der Ausdruck von $\Theta(v_1 \ldots v_p)$ linear, homogen und mit constanten Coefficienten aus $|\delta|^p$ Functionen der Form

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \ldots \sum_{-\infty,+\infty}^{m_p} (-1)^{\sum_{1,p}^{\mu} h_\mu \cdot m_\mu} \cdot e^{+\pi i \delta \cdot \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} m_\mu \cdot m_\nu \cdot a_{\mu\nu} + 2\pi i \cdot \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} (k_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) m_\nu \cdot a_{\mu\nu} + 2\pi i \cdot \sum_{1,p}^{\mu} (k_\mu + \frac{1}{2} g_\mu + m_\mu \cdot \delta) \cdot v_\mu}$$

zusammen.

**§ 3.** Es fragt sich zunächst, wann eine solche Reihe unbedingt convergent ist. Wenn $v_1 \ldots v_p$ irgendwie fixirt sind, so hat die Reihe von einem Factor abgesehen die Form

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \ldots \sum_{-\infty,+\infty}^{m_p} e^{+\pi i \delta \cdot \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} m_\mu \cdot m_\nu a_{\mu\nu} + \sum_{1,p}^{\mu} A_\mu \cdot m_\mu}$$

Setzt man

$$a_{\mu\nu} = a'_{\mu\nu} + i \cdot a''_{\mu\nu} \qquad A_\mu = A'_\mu + i \cdot A''_\mu$$

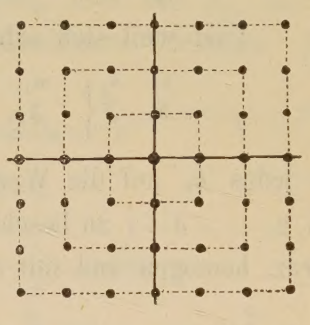
so ist die aus den absoluten Werthen der einzelnen Reihenglieder gebildete Reihe, deren Convergenz zu prüfen ist, die folgende

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \ldots \sum_{-\infty,+\infty}^{m_p} e^{-\pi \delta \cdot \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} m_\mu \cdot m_\nu \cdot a''_{\mu\nu} + \sum_{1,p}^{\mu} A'_\mu \cdot m_\mu}.$$

Nach den Eigenschaften der $a_{\mu\nu}$ ist aber $-\pi \cdot \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} m_\mu \cdot m_\nu \cdot a''_{\mu\nu}$ stets negativ und von 0 verschieden, woraus man erkennt, dass bei $\delta < 0$ unmöglich Convergenz stattfinden kann. (Ausserdem ist schon bemerkt worden, dass die ganze Zahl $\frac{-1}{2\pi i} \cdot (\beta_{11} + \beta_{22} + \ldots + \beta_{pp})$ oder $+p \cdot \delta$ jedenfalls positiv sein muss, wenn die Function existiren soll.)

Dass nun wirklich für positives ganzzahliges $\delta$ die Reihe stets convergirt, dafür lässt sich ein Beweis genau so geben, wie Riemann (Werke Seite 452—455) die Convergenz seiner $p$-fach unendlichen fundamentalen Thetareihe bewiesen hat. Ein anderes, kürzeres und elementareres Verfahren

soll jetzt zunächst für $p = 2$, wo ebenso wie für $p = 3$ geometrische Hilfsanschauungen möglich sind, und dann allgemein entwickelt werden.



Für $p = 2$ kann man die Werthepaare der Summationsindices $m_1$, $m_2$ durch Punkte einer Hilfsebene darstellen und diese Punkte nach concentrischen Quadraten ordnen, wie die Figur zeigt. Auf dem ganzen Umfange des kleinsten Quadrates hat $a''_{11} x_1^2 + 2a''_{12} . x_1 x_2 + a''_{22} . x_2^2$ als wesentlich positive Grösse eine untere Grenze $A > 0$, während $A'_1 . x_1 + A'_2 . x_2$ dem absoluten Werthe nach eine obere Grenze $B$ besitzen wird. Für einen Punkt $m_1$, $m_2$ auf dem $k^{\text{ten}}$ Quadrat folgt dann

$$a''_{11} . m_1^2 + 2a''_{12} . m_1 m_2 + a''_{22} . m_2^2 \geqq k^2 . A; \quad -k . B \leqq A'_1 . m_1 + A'_2 . m_2 \leqq +k . B$$

oder

$$\pi . \delta . (a''_{11} . m_1^2 + 2a''_{12} . m_1 . m_2 + a''_{22} . m_2^2) - A'_1 . m_1 - A'_2 . m_2 \geqq \pi . \delta . k^2 . A - k . B$$

d. h.

$$e^{-\pi . \delta . (a''_{11} . m_1^2 + 2a''_{12} . m_1 . m_2 + a''_{22} . m_2^2) + A'_1 m_1 + A'_2 m_2} \leqq e^{-\pi \delta k^2 . A + k . B}.$$

Und der Bestandtheil von

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \sum_{-\infty,+\infty}^{m_2} e^{-\pi \delta (a''_{11} m_1^2 + 2a''_{12} m_1 m_2 + a''_{22} . m_2^2) + A'_1 m_1 + A'_2 . m_2},$$

welcher den sämmtlichen Punkten $m_1$, $m_2$ des $k^{\text{ten}}$ Quadrates entspricht, ist daher höchstens gleich $8 . k . e^{-\pi \delta k^2 . A + k . B}$. Weil aber $\sum_{1,\infty}^{k} k . e^{-\pi \delta k^2 . A + k . B}$ convergirt, wie schon der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder zeigt, so ist auch die Doppelsumme für die besprochene Art der Summation und damit überhaupt unbedingt convergent, woraus auch die unbedingte und absolute Convergenz der complexen Reihe

$$\sum_{-\infty,\infty}^{m_1} \sum_{-\infty,+\infty}^{m_2} e^{+\pi i \delta (a_{11} m_1^2 + 2a_{12} m_1 m_2 + a_{22} m_2^2) + A_1 m_1 + A_2 m_2}$$

für $\delta > 0$ folgt.

Auf beliebiges $p$ ist das Verfahren leicht zu übertragen: Man ordnet die Gesammtheit der Werthsysteme $m_1 \ldots m_p$ in eine einfach unendliche Reihe von Gruppen, indem man zur $k^{\text{ten}}$ Gruppe alle Werthsysteme zählt, in denen das höchste vorkommende Element (vom Vorzeichen abgesehen) $k$ ist; die

Anzahl der in der $k^{\text{ten}}$ Gruppe enthaltenen Werthsysteme findet man durch Induction von der Form $a.k^{p-1}+b.k^{p-2}+\ldots$, auf die von $p$ abhängenden ganzzahligen Coefficienten $a, b, \ldots$ kommt es nicht weiter an. Die wesentlich positive und nur für $x_1 = x_2 = \ldots x_p = 0$ verschwindende Grösse $\sum_{1,p}^{\mu}\sum_{1,p}^{\nu} a''_{\mu\nu}.x_\mu.x_\nu$ hat eine gewisse untere Grenze $A>0$, wenn man $x_h$ als $+1$ oder $-1$ annimmt und die übrigen $x_i$ auf den Bereich von $-1$ bis $+1$ (mit Einschluss der Grenzen) beschränkt und so nach einander für jedes $h$ verfährt; $\sum_{1,p}^{\mu} A'_\mu.x_\mu$ hat bei denselben Annahmen über $x_1 \ldots x_p$ dem absoluten Werthe nach eine obere Grenze $B$, und so folgt schliesslich analog wie bei der Betrachtung für $p=2$ die Convergenz von

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \ldots \sum_{-\infty,+\infty}^{m_p} e^{-\pi\delta.\sum_{1,p}^{\mu}\sum_{1,p}^{\nu} m_\mu.m_\nu.a''_{\mu\nu}+\sum_{1,p}^{\mu} A'_\mu.m_\mu}$$

und damit die unbedingte Convergenz von

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \ldots \sum_{-\infty,+\infty}^{m_p} e^{+\pi i\delta.\sum_{1,p}^{\mu}\sum_{1,p}^{\nu} m_\mu.m_\nu.a_{\mu\nu}+\sum_{1,p}^{\mu} A_\mu.m_\mu}$$

aus der Convergenz von $\sum_{1,\infty}^{k}(a.k^{p-1}+\ldots).e^{-\pi\delta k^2.A+k.B}$ unter der Annahme $\delta>0$.*)

Für $p=2$ ist noch Rosenhain's Convergenzbeweis**) der zweifach unendlichen Thetareihen zu nennen; er beruht auf einer Vergleichung der gegebenen Doppelreihe mit dem Product zweier einfach unendlichen Reihen, die so gewählt sind, dass jedes Glied ihres als Doppelreihe aufgefassten Productes dem absoluten Werthe nach grösser ist als das entsprechende Glied

*) Ueber die Anregung zu diesem Beweisverfahren sei erwähnt, dass Weierstrass die Convergenz der bei Bildung der $\sigma$-Function vorkommenden Reihe

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1}\sum_{-\infty,+\infty}^{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^h}$$

(bei nicht reellem Verhältniss von $\omega_1$ und $\omega_2$) für $h\geqq 3$ einfach durch geometrische Darstellung der Punkte $m_1.\omega_1+m_2.\omega_2$ und Anordnung nach concentrisch ähnlichen Parallelogrammen zeigte; ist $\varrho$ der Radius eines ganz innerhalb des kleinsten Parallelogrammes gelegenen Kreises, so ist die Summe der absoluten Werthe der zum $k^{\text{ten}}$ Parallelogramm gehörigen Glieder der Reihe kleiner als $\frac{8k}{(k.\varrho)^h}$ u. s. w.

**) Mémoires de savants étrangers présentés à l'académie XI. (1851).

der gegebenen Reihe. Das Verfahren lässt sich auch auf beliebiges $p$ übertragen, wird aber dadurch umständlicher. — Göpel*) hat keinen Convergenzbeweis seiner Thetareihen veröffentlicht.

Ein anderer Beweis, der sich an den Rosenhain'schen Grundgedanken anschliesst, aber weit einfacher ist und sich auch auf beliebiges $p$ direct übertragen lässt, soll hier noch für $p = 2$ aufgestellt werden. Setzt man

$$+\pi\delta\,.\,(a''_{11}\,.\,m_1^2 + 2\,a''_{12}\,.\,m_1 m_2 + a''_{22}\,.\,m_2^2) - A'_1\,.\,m_1 - A'_2\,.\,m_2 = \psi(m_1, m_2)$$

und

$$(m_1^2 + \Theta_1)\,(m_2^2 + \Theta_2) = \chi(m_1, m_2),$$

wo $\Theta_1$ und $\Theta_2$ etwa positive echte Brüche seien, damit das später auftretende $\frac{1}{\chi(m_1, m_2)}$ nicht unendlich wird, so sieht man, dass $\frac{\chi(m_1, m_2)}{(\psi(m_1, m_2))^2}$ endlich bleibt, wenn $m_1$ und $m_2$ zugleich unendlich werden, aber Null wird, wenn nur eine dieser Grössen unendlich wird. Weiter wird $(\psi(m_1, m_2))^k\,.\,e^{-\psi(m_1, m_2)}$ stets 0, sobald $m_1$ und $m_2$ nicht beide endlich bleiben, und von

$$\left(\frac{\chi(m_1, m_2)}{(\psi(m_1, m_2))^2}\right)^h\,.\,(\psi(m_1, m_2))^{2h}\,.\,e^{-\psi(m_1, m_2)} = (\chi(m_1, m_2))^h\,.\,e^{-\psi(m_1, m_2)}$$

gilt daher Gleiches. Es existirt daher eine endliche obere Grenze $M$ für diesen Ausdruck, oder es ist stets

$$e^{-\psi(m_1, m_2)} \leqq \frac{M}{(\chi(m_1, m_2))^h}.$$

Aus der Convergenz von

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1}\ \sum_{-\infty,+\infty}^{m_2} \frac{1}{\chi(m_1, m_2)^h} = \left(\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \frac{1}{(m_1^2 + \Theta_1)^h}\right) \cdot \left(\sum_{-\infty,+\infty}^{m_2} \frac{1}{(m_2^2 + \Theta_2)^h}\right)$$

für jedes beliebige positive ganzzahlige $h$ folgt also die Convergenz der zu untersuchenden Reihe.

**§ 4.** Auf Grund dieser Convergenzbetrachtungen existirt also wirklich für $\delta > 0$ eine eindeutige und für jedes endliche Werthsystem $v_1 \ldots v_p$ endliche und stetige Function mit den Periodeneigenschaften:

$$\Theta(v_1 + 1, v_2 \ldots v_p) = (-1)^{g_1}\,.\,\Theta(v_1 \ldots v_p) \qquad \Theta(v_1 + a_{11}) \ldots v_p + a_{p1}) = (-1)^{h_1}\,.\,e^{-\pi i\delta(2v_1 + a_{11})}\,\Theta(v_1 \ldots v_p)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Theta(v_1 \ldots v_p + 1) = (-1)^{g_p}\,.\,\Theta(v_1 \ldots v_p) \qquad \Theta(v_1 + a_{1p}) \ldots v_p + a_{pp}) = (-1)^{h_p}\,.\,e^{-\pi i\delta(2v_p + a_{pp})}\,.\,\Theta(v_1 \ldots v_p)$$

*) Crelle's Journal Bd. 35.

falls die $a_{\mu\nu}$ die Periodicitätsmoduln der früher definirten Normalintegrale erster Gattung $u_1 \dots u_p$ sind. Und zwar setzt sich $\Theta(u_1 \dots u_p)$ homogen, linear und mit constanten Coefficienten aus $\delta^p$ Functionen der

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \dots \sum_{-\infty,+\infty}^{m_p} (-1)^{\sum_{1,p}^{\mu} h_\mu . m_\mu} . e^{+\pi i \delta \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} m_\mu . m_\nu . a_{\mu\nu} + 2\pi i . \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} (k_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) m_\nu . a_{\mu\nu} + 2\pi i . \sum_{1,p}^{\mu} (k_\mu + \frac{1}{2} g_\mu + m_\mu . \delta) . v_\mu}$$

zusammen. Eine Funktion mit den angegebenen Periodeneigenschaften heisst Thetafunction der Ordnung $\delta$ und der Charakteristik

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_p \\ h_1 & h_2 & \dots & h_p \end{pmatrix}.$$

Ersetzt man die unabhängigen Variablen durch die Normalintegrale $u_1 \dots u_p$, so entsteht eine eindeutige Function des Ortes in der Riemann'schen Fläche, sobald die Querschnitte als unüberschreitbar gelten; die Function ist überall endlich und hat $p . \delta$ Nullstellen in der Fläche. Werden also in die einzelnen logarithmischen Derivirten von $\Theta(v_1 \dots v_p)$ die Integrale $u_1 \dots u_p$ an Stelle der unabhängigen Variablen eingesetzt, so entstehen dadurch Integrale zweiter Gattung mit recht einfachen Periodicitätsmoduln und mit $\delta . p$ Unendlichkeitsstellen, Integrale mit nur einem Unendlichkeitspunkt sind für $p > 1$ nicht unmittelbar zu erhalten, doch wird sich später eine sehr einfache Darstellung der Normalintegrale zweiter Gattung nur durch die logarithmischen Derivirten einer Thetafunction erster Ordnung ergeben.

Die Thetafunctionen erster Ordnung sind in der Form enthalten:

$$C . \sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \dots \sum_{-\infty,+\infty}^{m_p} (-1)^{\sum_{1,p}^{\mu} h_\mu . m_\mu} . e^{+\pi i \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} m_\mu . m_\nu . a_{\mu\nu} + 2\pi i \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} \frac{1}{2} g_\mu . m_\nu . a_{\mu\nu} + 2\pi i . \sum_{1,p}^{\mu} (m_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) v_\mu} .$$

Ueber $C$ lässt sich so verfügen, dass man erhält

$$\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1} \dots \sum_{-\infty,+\infty}^{m_p} e^{+\pi i \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} (m_\mu + \frac{1}{2} g_\mu)(m_\nu + \frac{1}{2} g_\nu) a_{\mu\nu} + 2\pi i \sum_{1,p}^{\mu} (m_\mu + \frac{1}{2} g_\mu) . (v_\mu + \frac{1}{2} h_\mu)}$$

$\left(C = e^{+\frac{\pi i}{4} \sum_{1,p}^{\mu} \sum_{1,p}^{\nu} g_\mu . g_\nu a_{\mu\nu} + \frac{\pi i}{2} \sum_{1,p}^{\mu} g_\mu . h_\mu}\right.$ ist hierzu nöthig.)

Diese Function werde mit

$$\vartheta \begin{pmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{pmatrix} (v_1 \dots v_p)$$

bezeichnet. Die fundamentalen Eigenschaften

$$\vartheta\begin{pmatrix} g_1 + 2k_1 \dots g_p + 2k_p \\ h_1 + 2l_1 \dots h_p + 2l_p \end{pmatrix}(v_1 \dots v_p) = (-1)^{\sum\limits_{1,p}^{\mu} l_\mu \cdot g_\mu} \cdot \vartheta\begin{pmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{pmatrix}(v_1 \dots v_p),$$

$$\vartheta\begin{pmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{pmatrix}\left(v_1 + \frac{h'_1 + a_{11} \cdot g'_1 + \dots a_{p1} \cdot g'_p}{2} \dots v_p + \frac{h'_p + a_{1p} \cdot g'_1 + \dots a_{pp} \cdot g'_p}{2}\right) =$$

$$= e^{-\frac{\pi i}{2}\sum\limits_{1,p}^{\mu} g'_\mu \cdot (h_\mu + h'_\mu) - \frac{\pi i}{4}\sum\limits_{1,p}^{\mu}\sum\limits_{1,p}^{\nu} g'_\mu \cdot g'_\nu \cdot a_{\mu\nu} - \frac{\pi i}{2}\cdot\sum\limits_{1,p}^{\mu} g'_\mu \cdot v_\mu} \cdot \vartheta\begin{pmatrix} g_1 + g'_1 \dots g_p + g'_p \\ h_1 + h'_1 \dots h_p + h'_p \end{pmatrix}(v_1 \dots v_p)$$

und

$$\vartheta\begin{pmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{pmatrix}(-v_1 \dots -v_p) = (-1)^{\sum\limits_{1,p}^{\mu} g_\mu \cdot h_\mu} \cdot \vartheta\begin{pmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{pmatrix}(+v_1 \dots v_p)$$

sind leicht zu beweisen und werden später, allerdings meist im Falle $p = 2$, mehrfach benutzt werden. Erwähnt sei noch, dass die Potenzen oder Producte von Thetafunctionen erster Ordnung Thetafunctionen höherer Ordnung sind, wie die Periodeneigenschaften sofort zeigen; die Charakteristikelemente der neuen Function setzen sich einfach durch Summation aus den entsprechenden Charakteristikelementen der mit einander multiplicirten Thetafunctionen zusammen. Da eine Thetafunction der Ordnung $\delta$ und gegebener Charakteristik nur $\delta^p$ willkürliche Constanten homogen und linear erhält, so lassen sich viele Relationen höherer Ordnung zwischen Thetafunctionen der ersten Ordnung aufstellen; schon für $p = 2$ werden die Relationen zweiter Ordnung recht zahlreich, wie die Theorie der hyperelliptischen Functionen vom Geschlechte $p = 2$ bei Rosenhain, Göpel und die Arbeiten H. Weber's in Bd. 82 und 84 von Crelle's Journal zeigen.

**§ 5.** Weil die Thetafunctionen höherer Ordnungen sich doch auf die einfachen Thetafunctionen reduciren, braucht man nur die Functionen erster Ordnung als Functionen der Normalintegrale $u_1 \dots u_p$ und damit als Functionen des Ortes in der Riemann'schen Fläche zu untersuchen. Die Normalintegrale $u_1 \dots u_p$ sind bisher nur soweit festgelegt, dass eine additive Constante noch willkürlich ist. Jetzt werde gesetzt

$$u_\mu = \int_{z_0, s_0}^{z, s} du_\mu = \int_{\varepsilon}^{\zeta} du_\mu \qquad *)$$

*) Dann kann man freilich die $k_\mu$ (siehe weiter unten) nicht zum Verschwinden bringen, doch stören die $k_\mu$ in den Formeln wenig und die gegebene Definition der $u_\mu$ ist sonst recht brauchbar.

und man betrachtet die Function

$$\vartheta_\gamma(u_1 - e_1 \dots u_p - e_p)$$

in der Fläche; $\gamma$ steht als Abkürzung der Charakteristik $\begin{pmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{pmatrix}$ und $e_1 \dots e_p$ seien Constanten.

Die Function hat, wenn sie nicht etwa identisch verschwindet, $p$ bestimmte einfache Nullstellen, die auch theils zusammenfallen können, $\eta_1 \dots \eta_p$. Diese erfüllen die Bedingungen

$$e_\mu \equiv \sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(\eta_\nu) + k_\mu \qquad (\mu = 1, 2 \dots p),$$

wobei $k_1 \dots k_p$ von $e_1 \dots e_p$ unabhängige Grössen sind (vgl. Riemann, Abel'sche Functionen, Art. 22).

Die Frage, unter welchen Bedingungen für $e_1 \dots e_p$ die Thetafunction in der Fläche identisch verschwindet, hat Riemann in der Arbeit „Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen" behandelt, aber nicht ganz einwurfsfrei gelöst. Obwohl nun später durch Herrn C. Neumann auf anderem Wege das Problem völlig gelöst wurde, ist doch wohl eine einfache und strenge Durchführung des Riemann'schen Gedankenganges von Interesse.

Wenn $\vartheta_\gamma(u_1(\zeta) - e_1 \dots u_p(\zeta) - e_p)$ nicht identisch verschwindet, also $p$ Nullstellen $\eta_1 \dots \eta_p$ hat, so folgt für $\zeta = \eta_p$ unter Benutzung des Ausdrucks von $e_\mu$ sofort $\vartheta_\gamma\left(-\sum_{1,p-1}^{\nu} u_1(\eta_\nu) - k_1 \dots - \sum_{1,p-1}^{\nu} u_p(\eta_\nu) - k_\nu\right) = 0$ oder, da die Thetafunction höchstens ihr Zeichen ändert bei Umkehrung aller Argumente:

$$\vartheta_\gamma\left(+\sum_{1,p-1}^{\nu} u_1(\eta_\nu) + k_1 \dots \sum_{1,p-1}^{\nu} u_p(\eta_\nu) + k_p\right) = 0.$$

Da man nicht weiss, ob $\eta_1 \dots \eta_p$ durch passende Wahl der $e_1 \dots e_p$ in beliebige Lagen zu bringen sind, so bleibt noch fraglich, ob die letzte Formel auch gilt, wenn $\eta_1 \dots \eta_{p-1}$ ganz willkürliche Flächenpunkte sind. Und man muss sich, wie Riemann zu Anfang des Art. 2 hervorhebt, zunächst mit dem Beweis für den Fall begnügen, dass $\eta_1 \dots \eta_{p-1}$ sich unabhängig von einander innerhalb endlicher, wenn auch kleiner Bereiche befinden; durch einfache Verallgemeinerung des Satzes, dass eine Function eines variablen Punktes in der Riemann'schen Fläche identisch verschwindet, wenn sie in einem endlichen Bereich Null ist, folgt der Satz dann allgemein.

Sind nun $c_1 \dots c_p$ irgend welche Flächenpunkte, aber so gewählt, dass durch kein anderes ganz oder theilweise davon verschiedenes Punktsystem $c'_1 \dots c'_p$ die $p$ Bedingungen

$$\sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c_\nu) \equiv \sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c'_\nu) \qquad \mu = 1, 2 \dots p$$

erfüllt werden, so kann man die Function

$$\vartheta_\gamma\left(u_1(\zeta) - \sum_{1,p}^{\nu} u_1(c_\nu) - k_1 \dots u_p(\zeta) - \sum_{1,p}^{\nu} u_p(c_\nu) - k_p\right)$$

betrachten, entweder ist sie identisch 0 in der Fläche — und damit auch 0 für $c_1 \dots c_p$ — oder sie hat $p$ bestimmte Nullstellen, die sich aus den Bedingungen $\sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(\eta_\nu) \equiv e_\mu - k_\mu = \sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c_\nu)$ nach den über $c_1 \dots c_p$ gemachten Annahmen genau als $c_1 \dots c_p$ ergeben. Die Thetafunction ist daher unbedingt Null in $c_1 \dots c_p$, möglicherweise könnte sie auch identisch verschwinden. Für $\zeta = c_p$ folgt also gewiss

$$\vartheta_\gamma\left(+\sum_{1,p-1}^{\nu} u_1(c_\nu) + k_1 \dots \sum_{1,p-1}^{\nu} u_p(c_\nu) + k_p\right) = 0.$$

Die Einschränkung, welcher $c_1 \dots c_p$ hierbei unterworfen waren, ist damit gleichbedeutend, dass keine algebraische Function einer Ordnung $m \leqq p$ existiren darf, welche in $m$ von den $p$ Punkten $c_1 \dots c_p$ denselben Werth, etwa den Werth $\infty$, hat. Da sich aber bei einer Function solcher Ordnung nicht alle Unendlichkeitspunkte beliebig wählen lassen, so sind Punktsysteme $c_1 \dots c_p$ der geforderten Art wirklich vorhanden, und zwar kann man gewiss von einer geeigneten Anfangslage des Punktsystems ausgehend die einzelnen Punkte noch innerhalb enger Grenzen verändern, ohne damit der Bedingung zu widersprechen.*) Und hieraus folgt durch die früher erwähnte Riemann'sche Schlussweise sofort die Allgemeingiltigkeit der Gleichung

$$\vartheta_\gamma\left(\sum_{1,p-1}^{\nu} u_1(c_\nu) + k_1 \dots \sum_{1,p-1}^{\nu} u_p(c_\nu) + k_\nu\right) = 0$$

für jede beliebige Lage der $c_\nu$.

*) Recht ausführlich und streng ist dies bei Neumann zu Anfang des § 9 im Kap. XIII (II. Aufl.) dargestellt.

[Also ist $\vartheta_\gamma\left(u_1(\zeta)+\sum_{1,p-2}^{\nu} u_1(c_\nu)+k_1 \ldots u_p(\zeta)+\sum_{1,p-2}^{\nu} u_p(c_\nu)+k_p\right)$ eine identisch verschwindende Function und damit die Existenz derartiger Functionen gezeigt.]

Sind jetzt $e_1 \ldots e_p$ Grössen, die sich auf mehr als eine Art in der Form $e_\mu \equiv \sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c_\nu)+k_\mu$ darstellen lassen, etwa als $\sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c'_\nu)+k_\mu$ und $\sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c''_\nu)+k_\mu$, so ist $\vartheta_\gamma(u_1(\zeta)-e_1 \ldots u_p(\zeta)-e_p)$ gleich 0 für $\zeta = c'_1, c'_2 \ldots c'_p$ und auch für $\zeta = c''_1 \ldots c''_p$, also in mehr als $p$ Punkten der Fläche, und daher identisch 0.

Hiernach lässt sich ein früherer Satz vervollständigen.

Wenn $\vartheta_\gamma(u_1(\zeta)-e_1 \ldots u_p(\zeta)-e_p)$ nicht identisch verschwindet, so genügen die $p$ Nullstellen den Relationen

$$e_\mu \equiv \sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(\eta_\nu)+k_\mu \qquad (\mu = 1 \ldots p) \qquad \text{A.}$$

und diese lassen sich durch andere Punktsysteme überhaupt nicht befriedigen.

Es bleibt noch die Frage, ob auch bei identisch verschwindendem $\vartheta_\gamma(u_1(\zeta)-e_1 \ldots u_p(\zeta)-e_p)$ die Grössen $e_1 \ldots e_p$ in der Form $e_\mu \equiv \sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c_\nu)+k_\mu$ darstellbar sind, und ob diese Darstellung eine eindeutige oder vieldeutige ist. Ergiebt sich diese Darstellung als möglich und vieldeutig, dann weiss man, dass $\vartheta_\gamma\left(u_1(\zeta)-\sum_{1,p}^{\nu} u_1(c_\nu)-k_1 \ldots u_p(\zeta)-\sum_{1,p}^{\nu} u_p(c_\nu)-k_p\right)$ nicht identisch — also nur in $c_1 \ldots c_p$ — verschwindet, wenn $c_1 \ldots c_p$ nicht dem Ausnahmefalle angehören, wo $\sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c_\nu)$ noch durch ganz oder theilweise andere Punkte als $\sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c'_\nu)$ darstellbar ist; und dann kann man nicht identisch verschwindende Thetafunctionen mit $p$ willkürlich vorgeschriebenen Nullpunkten, von diesem Ausnahmefalle abgesehen, bilden.

Zur Entscheidung der Frage verfährt Riemann so: *)

Es sei $\vartheta_\gamma\left(u_1(\zeta)+\sum_{1,m-1}^{\nu} u_1(\alpha_\nu)-\sum_{1,m-1}^{\nu} u_1(\beta_\nu)-c_1 \ldots\right)$ stets identisch 0 für den variablen Punkt $\zeta$, wie man auch die Punkte $\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}$ und $\beta_1 \ldots \beta_{m-1}$ in

*) Art. 3, S. 202 und Anfang v. S. 203 der Werke; die auf den ersten Blick wenig übersichtliche Bezeichnung und die gleichzeitige Herleitung von zwei verschiedenen Sätzen stört etwas.

der Fläche wählen möge, aber die Function $\vartheta_\gamma\left(u_1(\zeta)+\sum_{1,m}^{\nu} u_1(\alpha_\nu)-\sum_{1,m}^{\nu} u_1(\beta_\nu)-e_1\ldots\right)$ sei durch passende Verfügung über $\beta_1\ldots\beta_m$ zu einer im Bezug auf die Variable $\zeta$ nicht identisch verschwindenden zu machen, wie auch $\alpha_1\ldots\alpha_m$ gewählt seien.

Es wird dann möglich sein nach willkürlicher Fixirung der $\alpha_1\ldots\alpha_m$ die $\beta_1\ldots\beta_m$ noch sämmtlich von einander verschieden zu wählen, denn ein System theilweise zusammenfallender Punkte $\beta_1\ldots\beta_m$, für welches die Thetafunktion nicht identisch, d. h. etwa in $\zeta_0$ nicht verschwindet, lässt sich nach Stetigkeitssätzen innerhalb hinreichend enger Grenzen abändern, so dass die Funktion in $\zeta_0$ auch noch von 0 verschieden bleibt, also nicht identisch verschwindet, und dass die Punkte $\beta_1\ldots\beta_m$ nun getrennt liegen.*) — Die Function $\vartheta_\gamma\left(u_1(\zeta)+\sum_{1,m}^{\nu} u_1(\alpha_\nu)-\sum_{1,m}^{\nu} u_1(\beta_\nu)-e_1\ldots\right)$ ist nun für $\zeta=\beta_1\ldots\beta_m$ jedenfalls Null auf Grund der gemachten Annahmen, und weil $\beta_1\ldots\beta_m$ getrennte Punkte sind, giebt es ausserdem nur noch $p-m$ Nullstellen der Thetafunction, $\eta_1\ldots\eta_{p-m}$. Dann folgt

$$-\sum_{1,m}^{\nu} u_\mu(\alpha_\nu)+\sum_{1,m}^{\nu} u_\mu(\beta_\nu)+e_\mu \equiv \sum_{1,m}^{\nu} u_\mu(\beta_\nu)+\sum_{1,p-m}^{\nu} u_\mu(\eta_\nu)+k_\mu$$
$$(\mu=1,2\ldots p)$$

oder

$$e_\mu \equiv \sum_{1,m}^{\nu} u_\mu(\alpha_\nu)+\sum_{1,p-m}^{\nu} u_\mu(\eta_\nu)+k_\mu .$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist daher $e_\mu$ wirklich in der Form $\sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c_\nu)+k_\mu$ darstellbar, aber nicht eindeutig, sondern so, dass $m$ von den $p$ Punkten $c_\nu$ — nämlich die Punkte $\alpha_1\ldots\alpha_m$ — ganz willkürlich angenommen werden können.**)

---

*) Vergl. Neumann's Werk S. 340/41. (2. Aufl.)

**) Beiläufig werde hier nach Riemann bemerkt, dass die übrigen $p-m$ Punkte, die $\eta_1\ldots\eta_{p-m}$, dann eindeutig bestimmt sind, unabhängig von der Wahl von $\beta_1\ldots\beta_m$. Sonst wären bei fixirten $\alpha_1\ldots\alpha_m$ die $e_\mu$ noch mehrdeutig darstellbar und $\sum_{1,p-m}^{\nu} u_\mu(\eta_\nu)$ noch in die Form $\sum_{1,p-m}^{\nu} u_\mu(\eta'_\nu)$ zu bringen; da aber $\beta_1\ldots\beta_m$ und $\eta_1\ldots\eta_{p-m}$ die Nullstellen einer nicht identisch verschwindenden Thetafunction sind, so würde hieraus ein Widerspruch mit Satz A a. v. S. folgen.

$m$ ist hierbei mindestens 1 und höchstens $p$, denn dass die Function $\vartheta_\gamma\Big(u_1(\zeta)+\sum_{1,p}^{\nu}u_1(\alpha_\nu)-\sum_{1,p}^{\nu}u_1(\beta_\nu)-e_1\ldots\Big)$, nachdem über $\alpha_1\ldots\alpha_p$ irgendwie verfügt ist, unmöglich identisch im Bezug auf $\zeta$ verschwinden kann bei jeder Wahl von $\beta_1\ldots\beta_p$, zeigt man so.*) Wenn $\vartheta_\gamma(B_1\ldots B_p)$ nicht Null ist, so ist $B_\mu$ in der Form $\sum_{1,p}^{\nu}u_\mu(\beta_\nu)+k_\mu$ eindeutig darstellbar vermittelst der Nullstellen der in $\zeta=\varepsilon$ nicht verschwindenden Function $\vartheta_\gamma\Big(\int_\varepsilon^\zeta du_1-B_1\ldots\int_\varepsilon^\zeta du_p-B_p\Big)$. Nun wird sicher die Gesammtheit aller denkbaren Werthsysteme $B_1\ldots B_p$ noch nicht erschöpft durch diejenigen, welche $\vartheta_\gamma(B_1\ldots B_p)$ oder $\vartheta_\gamma(B_1+A_1\ldots B_p+A_p)$ zu Null machen, wenn $A_1\ldots A_p$ irgendwie gegeben sind; es giebt daher in der Form $B_\mu\equiv\sum_{1,p}^{\nu}u_\mu(\beta_\nu)+k_\mu$ darstellbare Werthsysteme $B_1\ldots B_p$, wofür $\vartheta_\gamma(B_1+A_1\ldots B_p+A_p)$ nicht verschwindet. Für $A_\mu=-u_\mu(\zeta_0)-\sum_{1,p}^{\nu}u_\mu(\alpha_\nu)+e_\mu-k_\mu$ folgt hieraus die Existenz von Punktsystemen $\beta_1\ldots\beta_p$, welche

$$\vartheta_\gamma\Big(+u_1(\zeta)+\sum_{1,p}^{\nu}u_1(\alpha_\nu)-\sum_{1,p}^{\nu}u_1(\beta_\nu)-e_1\ldots\Big)$$

in dem beliebig gewählten Punkt $\zeta_0$ von Null verschieden machen.

Als allgemeines Resultat der Fälle $m=1,2\ldots p$ hat man den Satz:

Wenn $\vartheta_\gamma(u_1(\zeta)-e_1\ldots u_p(\zeta)-e_p)$ identisch verschwindet, so ist $e_\mu$ in der Form

$$\sum_{1,p}^{\nu}u_\mu(c_\nu)+k_\mu \qquad \textbf{B.}$$

---

*) Auf den Nachweis, dass man es mit einer beschränkten Zahl von Fällen zu thun hat, ist Riemann nicht eingegangen. Neumann hat diesen Punkt erledigt bei Gelegenheit einer ähnlichen Betrachtung wie die vorhergehende, nämlich bei seiner Wiedergabe des von ihm zum Ausgangspunkt seiner Untersuchung gemachten letzten Satzes im Art. 3 der Riemann'schen Abhandlung (vergl. Neumann's Werk §§ 6, 7 und Anfang von § 8 im XIII. Kapitel der zweiten Auflage). — Ohne die Festsetzung $u_\mu=\int_\varepsilon^\zeta du_\mu$ wäre die oben stehende Betrachtung nicht ganz so einfach; doch geschah diese von Riemann abweichende Bestimmung der Constanten in den Normalintegralen wesentlich in Rücksicht auf spätere Betrachtungen.

so darstellbar, dass mindestens einer der Punkte $c_\nu$ ganz willkürlich gewählt werden kann. *)

Und die früher bewiesenen Hauptsätze lassen sich hiermit so vereinigen:

Je nachdem $\vartheta_\gamma(u_1(\zeta)-e_1 \dots u_p(\zeta)-e_p)$ nur in $p$ Flächenpunkten oder identisch verschwindet, lassen sich die $p$ Bedingungen $e_\mu \equiv \sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c_\nu)+k_\mu$ nur auf eine Art — durch die Nullstellen der Thetafunction — oder auch noch bei willkürlicher Annahme mindestens eines der Punkte $c_\nu$ befriedigen.

Oder so:

Je nachdem $e_1 \dots e_p$ in der Form $e_\mu \equiv \sum_{1,p}^{\nu} u_\mu(c_\nu)+k_\mu$ eindeutig oder vieldeutig darstellbar ist, verschwindet $\vartheta_\gamma(u_1(\zeta)-e_1 \dots u_p(\zeta)-e_p)$ nur in den $p$ Punkten $c_\nu$ oder identisch in der Fläche.

In diesen Sätzen liegt die Möglichkeit des Jakobi'schen Umkehrproblems:

Die $p$ Bedingungen

$$\sum_{1,p}^{\nu} \int_{\varepsilon_\nu}^{\zeta_\nu} du_\mu \equiv A_\mu \qquad (\mu = 1 \dots p)$$

lassen sich bei gegebenen $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p$ und $A_1 \dots A_p$ durch ein Punktsystem $\zeta_1 \dots \zeta_p$ stets befriedigen, und zwar eindeutig oder unendlich vieldeutig, je nachdem $\vartheta_\gamma\left(u_1(\zeta)-A_1-\sum_{1,p}^{\nu} u_1(\varepsilon_\nu)-k_1 \dots\right)$ nur in $p$ Punkten oder identisch verschwindet.

Der Art. 3 der Riemann'schen Abhandlung über das Verschwinden der Thetafunctionen enthält noch einige Sätze, deren Beweis keine Schwierigkeiten mehr bietet und die — ebenso wie der Inhalt der Art. 4—6 — von keiner so fundamentalen Wichtigkeit sind, wie der hier in strenger Fassung

*) Wählt man etwa $c_p$ gleich dem Punkte $\varepsilon$, so folgt nach $u_\mu(\varepsilon) = 0$ die Darstellungsform $e_\mu \equiv \sum_{1,p-1}^{\nu} u_\mu(c_\nu)+k_\mu$, was i. a. eine eindeutige Darstellung sein wird. So ist eine Umkehrung des Satzes auf S. 236 (16) gefunden, denn wenn $\vartheta_\gamma(e_1 \dots e_p)$ Null ist, ist entweder $\vartheta_\gamma(u_1-e_1 \dots u_p-e_p)$ nur Null in $\varepsilon$ und $p-1$ bestimmten Punkten $\eta_1 \dots \eta_{p-1}$ — und dann folgt $e_\mu = \sum_{1,p-1}^{\nu} u_\mu(\eta_\nu)+k_\mu$ — oder es tritt der eben behandelte Fall ein.

entwickelte erste Theil der Abhandlung. Die Art. 23 und 24 der Arbeit über Abel'sche Functionen, zu deren Ergänzung die spätere Abhandlung entstand, enthalten wesentlich nichts anderes als Art. 2 und 3 dieser Abhandlung.

**§ 6.** Ursprünglich war eine Function von $p$ unabhängigen Variablen gesucht worden, die durch Einführung der Normalintegrale $u_1 \dots u_p$ zu einem Integrale zweiter Gattung in der Fläche würde; die Betrachtung führte zu den Thetafunctionen und es zeigte sich, dass die einzelnen partiellen logarithmischen Derivirten einer Thetafunction erster Ordnung Integrale zweiter Gattung mit $p$ einfachen Nullstellen und einfach zu bildenden Periodicitätsmoduln liefern, im Allgemeinen wenigstens, denn die Thetafunction selbst darf dabei nach Einsetzung der Integrale nicht identisch verschwinden.

Jetzt werde zur Abkürzung gesetzt

$$f_k(v_1, v_2 \dots v_p) = \frac{\partial lg\, \vartheta_\gamma(v_1, v_2 \dots v_p)}{\partial v_k}$$

$e_1 \dots e_p$ seien so gewählt, dass $\vartheta_\gamma(u_1 - e_1 \dots u_p - e_p)$ nicht identisch in der Fläche verschwinde. Dann ist

$$f_k(u_1 - e_1 \dots u_p - e_p)$$

ein Integral zweiter Gattung mit den Unendlichkeitspunkten $\eta_1 \dots \eta_p$ und den Periodicitätsmoduln

$$a_\nu \dots f_k^+ - f_k^- = 0$$
$$b_\nu \dots f_k^+ - f_k^- = \begin{cases} 0 & \dots \nu \gtrless k \\ -2\pi i & \dots \nu = k. \end{cases}$$

$\eta_1 \dots \eta_p$ sind hierbei die Nullpunkte von $\vartheta_\gamma(u_1 - e_1 \dots u_p - e_p)$. Daher wird $\sum_{1,p}^{k} C_k . f_k(u_1 - e_1 \dots u_p - e_p)$ ein Integral zweiter Gattung mit den Periodicitätsmoduln

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 \dots a_p & b_1 & b_2 & \dots & b_p \\ 0 & 0 \dots 0 & -2\pi i . C_1, & -2\pi i . C_2 & \dots & -2\pi i . C_p \end{array}$$

sein und im Allgemeinen auch noch die $p$ Unendlichkeitsstellen $\eta_1 \dots \eta_p$ besitzen.

Das Normalintegral zweiter Gattung für einen Flächenpunkt $c$ ist dadurch charakterisirt, dass es nur in $c$ unendlich wird, und zwar so, dass seine Entwickelung für die Umgebung dieser Stelle den unstetigen Bestandtheil $\frac{+1}{z - z_c}$ hat, und dass die Periodicitätsmoduln an $a_1 \dots a_p$ verschwinden. Hier-

durch ist das Integral bis auf eine additive Constante völlig bestimmt und seine Periodicitätsmoduln an $b_1 \dots b_p$ haben die einfachen Werthe:

$$b_\nu \dots t_c^+ - t_c^- = -2\pi i \left(\frac{du_\nu}{dz}\right)_c,$$

wie aus Betrachtung des Integrals $\int t_c du_\nu$ für die aus den Querschnitträndern bestehende Begrenzung der Riemann'schen Fläche folgt. Hierbei ist $c$ als gewöhnlicher Flächenpunkt vorausgesetzt, ist $c$ ein Verzweigungspunkt, so ändert das nicht viel, wesentlich ist überhaupt nur, dass die Periodicitätsmoduln von $t_c$ an $b_1 \dots b_p$ algebraische Functionen des Unstetigkeitspunktes $c$ sind, dass man sie kennt, ohne einen Ausdruck für $t_c$ selbst zu besitzen.

Im Ausdruck $t_c - \sum_{1,p}^{k} C_k . f_k(u_1 - e_1 \dots u_p - e_p)$ kann man daher $C_1 \dots C_p$ stets so bestimmen, dass derselbe an allen Querschnitten stetig ist. Ist $c$ von $\eta_1 \dots \eta_p$ verschieden, so stellt der Ausdruck eine algebraische Function mit den Unendlichkeitsstellen $c$, $\eta_1 \dots \eta_p$ dar und nur bei speciellen Beziehungen zwischen $\eta_1 \dots \eta_p$ und $c$ kann es wohl vorkommen, dass die Ordnung der Function sich vermindert, dass einige Unendlichkeitspunkte sich fortheben; eine algebraische Function bleibt der Ausdruck sicher, denn in $c$ bleibt er unendlich.

Ist dagegen $c$ mit einem der Punkte $\eta_1 \dots \eta_p$ identisch, etwa mit $\eta_p$ und bestimmt man in $t_{\eta_p} - \sum_{1,p}^{k} C_k . f_k(u_1 - c_1 \dots u_p - e_p)$ die $C_1 \dots C_p$ wieder so, dass alle Periodicitätsmoduln Null werden, so ist der Ausdruck eine Constante, denn er könnte höchstens in $\eta_1 \dots \eta_p$ unendlich werden und nach der Annahme, dass $\vartheta_\gamma(u_1 - e_1 \dots u_p - e_p)$ nicht identisch verschwinde, giebt es keine algebraische Function $p^{ter}$ Ordnung, die in $\eta_1 \dots \eta_p$ denselben Werth (hier den Werth $\infty$) annähme, und auch keine solche Function einer Ordnung $m < p$, die in $m$ von den Punkten $\eta_1 \dots \eta_p$ gleichen Werth hätte.

So lässt sich ein beliebiges Normalintegral zweiter Gattung durch die $p$ logarithmischen Derivirten einer nicht identisch verschwindenden Thetafunction, zu deren Nullstellen der Unendlichkeitspunkt des Integrals gehören muss, darstellen, ohne dass algebraische Functionen dabei auftreten. *)

*) Eine additive Constante war beim Normalintegral $t_c$ noch willkürlich gelassen, durch Bildung von $\int_{\zeta_0}^{\zeta} dt_c$ bestimmt sie sich zum Beispiel.

Das Normalintegral dritter Gattung mit den singulären Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tilde{\omega}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ werde so definirt, dass seine Periodicitätsmoduln an $a_1, a_2 \ldots a_p$ verschwinden und dass an dem von $\varepsilon_1$ nach $\varepsilon_2$ führenden Schnitt $\tilde{\omega}^+_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} - \tilde{\omega}^-_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ den Werth $+2\pi i$ habe. (Sind dann $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ keine Verzweigungspunkte, so ist $\tilde{\omega}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} + lg(z - z_1)$ in $\varepsilon_1$ und $\tilde{\omega}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} - lg(z - z_2)$ in $\varepsilon_2$ stetig und eindeutig; ist $\varepsilon_1$ oder $\varepsilon_2$ ein Verzweigungspunkt oder sind beide Punkte Verzweigungspunkte, so beeinflusst das diese Eigenschaften nur wenig und die gegebene Definition von $\tilde{\omega}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ bleibt ganz dieselbe.)

Man wählt nun $p-1$ Punkte $c_1 \ldots c_{p-1}$, so dass die beiden Functionen

$$\vartheta_1(\zeta) = \vartheta_\gamma\Big(u_1(\zeta) - u_1(\varepsilon_1) - \sum_{1,p-1}^{\nu} u_1(c_\nu) - k_1 \ldots u_p(\zeta) - u_p(\varepsilon_1) - \sum_{1,p-1}^{\nu} u_p(c_\nu) - k_p\Big)$$

$$\vartheta_2(\zeta) = \vartheta_\gamma\Big(u_1(\zeta) - u_1(\varepsilon_2) - \sum_{1,p-1}^{\nu} u_1(c_\nu) - k_1 \ldots u_p(\zeta) - u_p(\varepsilon_2) - \sum_{1,p-1}^{\nu} u_p(c_\nu) - k_p\Big)$$

nicht identisch, also nur in $\varepsilon_1, c_1 \ldots c_{p-1}$ resp. $\varepsilon_2, c_1 \ldots c_{p-1}$ verschwinden. Um $lg\vartheta_1$ und $lg\vartheta_2$ eindeutig in der Riemann'schen Fläche zu machen, zieht man noch Schnitte von den Kreuzungspunkten der beiden Schnitte eines Querschnittpaares nach den Nullstellen der Thetafunctionen. Man findet dann die Periodicitätsmoduln für die Querschnitte, falls die Charakteristik $\gamma$ gleich $\begin{pmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{pmatrix}$ ist:

$$a_\mu \begin{cases} lg\vartheta_1^+ - lg\vartheta_1^- = \pi i g_\mu + 2M_\mu . \pi i \\ lg\vartheta_2^+ - lg\vartheta_2^- = \pi i g_\mu + 2M_\mu . \pi i \end{cases}$$

$$b_\mu \begin{cases} lg\vartheta_1^+ - lg\vartheta_1^- = \pi i h_\mu + 2N_\mu . \pi i - \pi i(u_\mu^+ + u_\mu^-) + 2\pi i . c'_\mu \\ lg\vartheta_2^+ - lg\vartheta_2^- = \pi i h_\mu + 2N_\mu . \pi i - \pi i(u_\mu^+ + u_\mu^-) + 2\pi i . c''_\mu , \end{cases}$$

wobei

$$c'_\mu = u_\mu(\varepsilon_1) + \sum_{1,p-1}^{\nu} u_\mu(c_\nu) + k_\mu$$

$$c''_\mu = u_\mu(\varepsilon_2) + \sum_{1,p-1}^{\nu} u_\mu(c_\nu) + k_\mu \qquad (\mu = 1 \ldots p)$$

Dass hier bei den Functionen $lg\vartheta_1$ und $lg\vartheta_2$ dieselben ganzen Zahlen $M_\mu$ und $N_\mu$ auftreten, folgt daraus, dass man durch stetige Aenderung der Constanten in den Thetafunctionen die Functionen $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$ ineinander überführen kann, wobei $M_1 \ldots M_p$ und $N_1 \ldots N_p$ sich nicht sprungweise ändern können. — An den zu den Nullpunkten von $\vartheta_i$ führenden Schnitten ist stets $lg\vartheta_i^+ - lg\vartheta_i^- = 2\pi i$.

Für $lg\vartheta_2 - lg\vartheta_1 = lg\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$ hat man daher das folgende Verhalten an den Querschnitten:

$$a_\mu \ldots \left(lg\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^+ - \left(lg\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^- = 0$$

$$b_\mu \ldots \left(lg\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^+ - \left(lg\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right)^- = 2\pi i(e''_\mu - e'_\mu) = +2\pi i(u_\mu(\varepsilon_2) - u_\mu(\varepsilon_1)).$$

Und $lg\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$ ist stetig an den nach $c_1 \ldots c_{p-1}$ gezogenen Schnitten und hat die Aenderung $+2\pi i$ beim Uebergange von der negativen auf die positive Seite des nach $\varepsilon_2$ führenden Schnittes und die Aenderung $-2\pi i$ an dem nach $\varepsilon_1$ führenden Schnitt. Lässt man den nach $\varepsilon_2$ gezogenen Schnitt aus dem nach $\varepsilon_1$ gezogenen und einer von $\varepsilon_1$ nach $\varepsilon_2$ führenden Linie bestehen, so ist $lg\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$ ausser an den Querschnitten $b_\mu$ nur unstetig an der von $\varepsilon_1$ nach $\varepsilon_2$ führenden Linie und verhält sich an dieser genau wie das Normalintegral dritter Gattung $\tilde{\omega}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$. Daher ist $lg\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} - \tilde{\omega}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ eindeutig in den Umgebungen von $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, also nicht mehr logarithmisch unendlich in diesen Punkten; der Ausdruck ist ein Integral erster Gattung, oder vielmehr eine Constante wegen der Stetigkeit an $a_1 \ldots a_p$.

Damit ist das bisher nur bis auf eine additive Constante bestimmte Normalintegral $\tilde{\omega}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ in der Form

$$\tilde{\omega}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = lg\frac{\vartheta_\gamma\left(u_1(\zeta) - u_1(\varepsilon_2) - \sum_{1,p-1}^{\nu} u_1(c_\nu) - k_1 \ldots\right)}{\vartheta_\gamma\left(u_1(\zeta) - u_1(\varepsilon_1) - \sum_{1,p-1}^{\nu} u_1(c_\nu) - k_1 \ldots\right)} + \text{Const.}$$

dargestellt; für seine Periocitätsmoduln an $b_1 \ldots b_p$ folgt beiläufig:

$$b_\mu \ldots \tilde{\omega}^+_{\varepsilon_1\varepsilon_2} - \tilde{\omega}^-_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = +2\pi i.(u_\mu(\varepsilon_2) - u_\mu(\varepsilon_1)) \qquad \mu = 1 \ldots p,$$

was man sonst aus dem über alle Querschnittränder genommenen Integral $\int\tilde{\omega}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}.du_\mu$ herleitet.

Die in $\tilde{\omega}_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ noch willkürlich gebliebene Constante fällt weg, wenn man statt des unbestimmten Integrals das zwischen zwei Grenzen genommene bestimmte betrachtet. Man findet

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}\delta\tilde{\omega}_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = lg\left\{\frac{\vartheta_\gamma(u_1(\xi_2) - u_1(\varepsilon_2) - A_1 \ldots)}{\vartheta_\gamma(u_1(\xi_2) - u_1(\varepsilon_1) - A_1 \ldots)} \cdot \frac{\vartheta_\gamma(u_1(\xi_1) - u_1(\varepsilon_1) - A_1 \ldots)}{\vartheta_\gamma(u_1(\xi_1) - u_1(\varepsilon_2) - A_1 \ldots)}\right\}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt ist

$$A_\mu = \sum_{1,p-1}^{\nu} u_\mu(c_\nu) + k_\mu \ldots \mu = 1 \ldots p.$$

Vertauscht man nun die Integrationsgrenzen $\xi_1$ und $\xi_2$ mit den Parametern, von denen das Integral noch abhängt, mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, so lässt sich schreiben

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\tilde{\omega}_{\xi_1 \xi_2} = lg \left\{ \frac{\vartheta_\gamma(u_1(\xi_2) - u_1(\varepsilon_2) + A_1 \ldots)}{\vartheta_\gamma(u_1(\xi_2) - u_1(\varepsilon_1) + A_1 \ldots)} \cdot \frac{\vartheta_\gamma(u_1(\xi_1) - u_1(\varepsilon_1) + A_1 \ldots)}{\vartheta_\gamma(u_1(\xi_1) - u_1(\varepsilon_2) + A_1 \ldots)} \right\}$$

und es ist nach früheren allgemeinen Sätzen $\vartheta_\gamma(A_1 \ldots A_p)$ Null und danach auch $-A_\mu$ in der Form $\sum_{1,p-1}^{\nu} u_\mu(c'_\nu) + k_\mu$ darstellbar *); so folgt für $\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\tilde{\omega}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ ein Ausdruck, der sich vom ursprünglichen Ausdruck des $\int_{\xi_1}^{\xi_2} d\tilde{\omega}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$ nur dadurch unterscheidet, dass andere Grössen $c_\nu$ auftreten, was ein rein formeller Unterschied ist, weil das Integral dritter Gattung von den Punkten $c_\nu$ überhaupt nicht abhängt. Damit ist also die Formel

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} d\tilde{\omega}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\tilde{\omega}_{\xi_1 \xi_2}$$

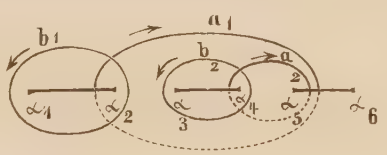
bewiesen, die man sonst auch aus Randintegralbetrachtungen herzuleiten pflegt.

*) Die Anmerkung auf Seite 240 (20) ist zu vergleichen.

# Zweiter Theil.

Wenn man zwei verschiedene Thetafunctionen mit denselben Argumenten, $\vartheta_\gamma(u_1 - e_1 \ldots u_p - e_p)$ und $\vartheta_{\gamma'}(u_1 - e_1 \ldots u_p - e_p)$ hat, welche beide nicht identisch verschwinden, so besitzt ihr Quotient in der Fläche $p$ Nullstellen und $p$ Unendlichkeitsstellen, im Allgemeinen wenigstens, und seine Werthe an zusammengehörigen Stellen zu beiden Ufern eines Querschnittes unterscheiden sich höchstens dem Vorzeichen nach. Das Quadrat des Quotienten ist also eine algebraische Function mit zweifachen Unendlichkeits- und Nullstellen. Für die zweiblättrige Fläche vom Geschlechte $p=2$ lässt sich die Bestimmung dieser algebraischen Functionen noch ziemlich einfach durchführen, wenn man $u_\mu = \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_\mu$ und $e_\mu = 0$ setzt.

**§ 7.** Die sechs einfachen Verzweigungspunkte der Fläche seien $\alpha_1 \ldots \alpha_6$ und es werde die gezeichnete Querschnittziehung zu Grunde gelegt. *) Die beiden Normalintegrale erster Gattung sind durch die Periodicitätsmoduln charakterisirt:




| | $a_1$ | $a_2$ | $b_1$ | $b_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $u_1^+ - u_1^-$ | $+1$ | $0$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $u_2^+ - u_2^-$ | $0$ | $+1$ | $a_{21}$ | $a_{22}$. |

Durch diese Grössen lassen sich die vollständigen Integrale, die Integrale zwischen zwei Verzweigungspunkten ausdrücken, was für spätere Betrachtungen recht wichtig ist. Der Periodicitätsmodul von $u_\mu$ an $a_k$ ist

*) Uebrigens brauchen $\alpha_1 \ldots \alpha_6$ durchaus nicht etwa reell zu sein.

gleich der negativ genommenen Aenderung von $u_\mu$ bei positiver Durchlaufung von $b_k$, und der Periodicitätsmodul an $b_k$ ist gleich der Aenderung des Integrals bei positiver Durchlaufung von $a_k$. So findet man, weil sich die Querschnitte beliebig eng zusammenziehen lassen:

$$+1 = -\int_{(b_1)} du_1 = +2 \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} du_1 \qquad 0 = \int_{(b_1)} du_2 = -2 \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} du_2$$

$$0 = \int_{(b_2)} du_1 = -2 \cdot \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} du_1 \qquad +1 = -\int_{(b_2)} du_2 = +2 \cdot \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} du_2$$

$$a_{11} = +\int_{(a_1)} du_1 = 2 \cdot \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} du_1 + 2 \cdot \int_{\alpha_4}^{\alpha_5} du_1 \qquad a_{21} = \int_{(a_1)} du_2 = 2 \cdot \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} du_2 + 2 \cdot \int_{\alpha_4}^{\alpha_5} du_2$$

$$a_{12} = \int_{(a_2)} du_1 = 2 \cdot \int_{\alpha_4}^{\alpha_5} du_1 \qquad a_{22} = \int_{(a_2)} du_2 = 2 \cdot \int_{\alpha_4}^{\alpha_5} du_2 \ .$$

Dabei sind die Integrale $\int_{\alpha_i}^{\alpha_k} du_1$ und $\int_{\alpha_i}^{\alpha_k} du_2$ jedesmal beide auf demselben Wege genommen, und zwar — worauf es hier freilich wenig ankommt — im oberen Blatte und bei Verzweigungsschnitten an der positiv imaginären Seite. Es folgt

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} du_1 = +\frac{1}{2} \qquad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} du_2 = 0$$

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} du_1 = \frac{a_{11} - a_{12}}{2} \qquad \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} du_2 = \frac{a_{21} - a_{22}}{2}$$

$$\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} du_1 = 0 \qquad \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} du_2 = +\frac{1}{2}$$

$$\int_{\alpha_4}^{\alpha_5} du_1 = \frac{a_{12}}{2} \qquad \int_{\alpha_4}^{\alpha_5} du_2 = \frac{a_{22}}{2} \ .$$

Und weil ein um alle Verzweigungspunkte herum genommenes Integral Null ist, hat man $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} du_\mu + \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} du_\mu + \int_{\alpha_5}^{\alpha_6} du_\mu = 0$ oder

$$\int_{\alpha_5}^{\alpha_6} du_1 = -\frac{1}{2} \qquad \int_{\alpha_5}^{\alpha_6} du_2 = -\frac{1}{2} .$$

So ist jedem Punktpaare $\alpha_i, \alpha_{i+1}$ ein Grössenpaar der Form

$$\frac{h_1 + a_{11} \cdot g_1 + a_{12} \cdot g_2}{2} \qquad \frac{h_2 + a_{21} \cdot g_1 + a_{22} \cdot g_2}{2}$$

zugeordnet. Würde man die Integrale auf irgend anderen Wegen nehmen, aber immer $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} du_1$ und $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} du_2$ genau auf demselben Wege, so würden sich $g_1, g_2, h_1, h_2$ nur um Vielfache von 2 ändern, worauf es später nicht weiter ankommt, man darf daher in dem Grössensystem

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix},$$

welches analog wie bei einer Thetafunction Charakteristik heisse, die Elemente auf 0 oder $+1$ nach dem Modul 2 reduciren.

Die Werthepaare von $\int_{\alpha_i}^{\alpha_k} du_1, \int_{\alpha_i}^{\alpha_k} du_2$ lassen sich dann auch leicht angeben und wieder durch eine Charakteristik darstellen. Diese Zuordnung von Charakteristiken zu Verzweigungspunktpaaren lässt sich auf folgende Art sehr übersichtlich gestalten.

Es giebt 16 verschiedene Charakteristiken, deren Elemente $g_1, g_2, h_1, h_2$ entweder 0 oder $+1$ sind. Je nachdem $g_1 . h_1 + g_2 . h_2$ gerade oder ungerade ist, heisse die Charakteristik selbst gerade oder ungerade. [Zu geraden oder ungeraden Charakteristiken gehören auch gerade oder ungerade Thetafunctionen.] Ungerade Charakteristiken giebt es nur sechs:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bei der hier gegebenen Anordnung in zwei Gruppen bestehen die folgenden Sätze, wenn man die Charakteristik $\begin{pmatrix} g_1 + g_1' & g_2 + g_2' \\ h_1 + h_1' & h_2 + h_2' \end{pmatrix}$, in welcher die Elemente noch nach dem Modul 2 auf 0 oder 1 reducirt sein können, als Summe von $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} g_1' & g_2' \\ h_1' & h_2' \end{pmatrix}$ bezeichnet:

1) Die Summe je zweier Charakteristiken einer Gruppe ist gleich der dritten Charakteristik dieser Gruppe.

2) Die Summe zweier Charakteristiken aus verschiedenen Gruppen ist von $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ und von den sechs ungeraden Charakteristiken verschieden, also eine der neun von $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ verschiedenen geraden Charakteristiken.

3) Daher ist jede von $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ verschiedene gerade oder ungerade Charakteristik auf eine einzige Art in zwei ungerade Charakteristiken zerlegbar.

4) Die Summe von drei verschiedenen ungeraden Charakteristiken ist immer eine gerade Charakteristik, und zwar lässt sich jede gerade Charakteristik, auch $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, auf zwei Arten durch je drei ungerade darstellen.

Weitere Sätze über die Zerlegungen einer Charakteristik in eine gerade und eine ungerade oder in zwei ungerade sind im Folgenden nicht nöthig.

Zerlegt man nun die Charakteristiken, welche den Paaren von Integralen $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} du_1, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} du_2$ entsprechen, in je zwei ungerade, so entsteht:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} du_1, \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} du_2 \ldots \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$$

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} du_1, \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} du_2 \ldots \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$$

$$\int_{\alpha_3}^{\alpha_4} du_1, \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} du_2 \ldots \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$$

$$\int_{\alpha_4}^{\alpha_5} du_1, \int_{\alpha_4}^{\alpha_5} du_2 \ldots \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$$

$$\int_{\alpha_5}^{\alpha_6} du_1, \int_{\alpha_5}^{\alpha_6} du_2 \ldots \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right).$$

Und wenn man die sechs ungeraden Charakteristiken kurz folgendermaassen bezeichnet:

$$\underset{\beta_1}{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)} \quad \underset{\beta_2}{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)} \quad \underset{\beta_3}{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)} \quad \underset{\beta_4}{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)} \quad \underset{\beta_5}{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)} \quad \underset{\beta_6}{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)},$$

so entspricht den Integralen $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} du_1, \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} du_2$ die Charakteristik $\beta_i + \beta_{i+1}$ und daraus folgt allgemein den Integralen $\int_{\alpha_i}^{\alpha_k} du_1, \int_{\alpha_i}^{\alpha_k} du_2$ zugeordnet die Charakteristik

$\beta_i+\beta_k$. — $\beta_1,\beta_3$ und $\beta_5$ bilden die eine, $\beta_2,\beta_4$ und $\beta_6$ die andere der früher betrachteten Gruppen der ungeraden Charakteristiken.

**§ 8.** Für die Thetafunctionen galten die Formeln

$$\vartheta\begin{pmatrix}g_1 g_2\\ h_1 h_2\end{pmatrix}(v_1,v_2)=\sum_{-\infty,+\infty}^{m_1}\sum_{-\infty,+\infty}^{m_2} e^{+\pi i\cdot\sum_{1,2}^{\mu}\sum_{1,2}^{\nu}(m_\mu+\frac{1}{2}g_\mu)(m_\nu+\frac{1}{2}g_\nu)a_{\mu\nu}+2\pi i\sum_{1,2}^{\mu}(m_\mu+\frac{1}{2}g_\mu)(v_\mu+\frac{1}{2}h_\mu)}$$

$$\vartheta\begin{pmatrix}g_1 g_2\\ h_1 h_2\end{pmatrix}(-v_1,-v_2)=(-1)^{g_1 h_1+g_2 h_2}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}g_1 g_2\\ h_1 h_2\end{pmatrix}(v_1,v_2)$$

$$\vartheta\begin{pmatrix}g_1 g_2\\ h_1 h_2\end{pmatrix}\left(v_1+\frac{h_1'+a_{11}g_1'+a_{21}\cdot g_2'}{2},v_2+\frac{h_2'+a_{12}g_1'+a_{22}\cdot g_2'}{2}\right)=$$

$$=e^{-\frac{\pi i}{2}\sum_{1,2}^{\mu}g_\mu'(h_\mu+h_\mu')-\frac{\pi i}{4}(a_{11}g_1'^2+2a_{12}g_1'\cdot g_2'+a_{22}\cdot g_2'^2)-\pi i\cdot\sum_{1,2}^{\mu}g_\mu'\cdot v_\mu}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}g_1+g_1' & g_2+g_2'\\ h_1+h_1' & h_2+h_2'\end{pmatrix}(v_1,v_2).$$

Und die Reduction der Charakteristikelemente auf 0 oder 1 nach dem Modul 2, wie sie in der letzten Formel nöthig sein kann, änderte höchstens das Vorzeichen der Function, es war allgemein

$$\vartheta\begin{pmatrix}g_1+2k_1, g_2+2k_2\\ h_1+2l_1, h_2+2l_2\end{pmatrix}(v_1,v_2)=(-1)^{g_1\cdot l_1+g_2\cdot l_2}\cdot\vartheta\begin{pmatrix}g_1 g_2\\ h_1 h_2\end{pmatrix}(v_1,v_2).$$

Die sechs Functionen mit ungeraden Charakteristiken, die ungeraden Thetafunctionen, ändern ihre Zeichen, wenn $v_1$ und $v_2$ gleichzeitig durch $-v_1,-v_2$ ersetzt werden, daher ist stets

$$\vartheta_{\beta_i}(0,0)=0.$$

Setzt man daher in irgend eine der 16 Thetafunctionen, in $\vartheta_\gamma(v_1,v_2)$, für $v_1,v_2$ ein System halber Perioden mit der Charakteristik $\gamma+\beta_h$ ein (d. h. ein Grössenpaar $\frac{h_1'+a_{11}\cdot g_1'+a_{21}\cdot g_2'}{2}$, $\frac{h_2'+a_{12}\cdot g_1'+a_{22}\cdot g_2'}{2}$, wofür $\begin{pmatrix}g_1' & g_2'\\ h_1' & h_2'\end{pmatrix}=\gamma+\beta_h$ und $\beta_h$ eine der ungeraden Charakteristiken), so unterscheidet sich $\vartheta_\gamma(v_1,v_2)$ von $\vartheta_{\gamma+\gamma+\beta_h}(0,0)$ oder $\vartheta_{\beta_h}(0,0)$ nur um einen Factor und ist also Null. Wendet man das speciell auf eine ungerade Thetafunction an, so folgt:

$\vartheta_{\beta_i}(v_1,v_2)$ ist Null, wenn $v_1,v_2$ ein Halbperiodensystem mit der Charakteristik $\beta_i+\beta_h$ $(h=1,2\ldots6)$ ist.

Das Paar von Integralen $\int_{\alpha_h}^{\alpha_i}du_1$, $\int_{\alpha_h}^{\alpha_i}du_2$ war nun als ein solches System halber Perioden mit der Charakteristik $\beta_h+\beta_i$ erkannt. Die Function des Flächenpunktes $\zeta$

$$\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_h}^{\zeta} du_1, \int_{\alpha_h}^{\zeta} du_2\right)$$

verschwindet deshalb im Punkte $\zeta = \alpha_i$, und auch in $\alpha_h$, weil dort beide Integrale Null sind. Wenn $h = i$ ist, ist die Function sicher identisch Null in der Fläche, weil sie in jedem Verzweigungspunkte und damit in mehr als zwei Punkten verschwindet; ob sie für $h \gtrless i$ auch identisch Null sein kann, ist nicht ganz so einfach zu entscheiden, hierauf wird später eingegangen werden.

Von der Function

$$\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$$

sind auch leicht zwei Nullstellen in der Fläche anzugeben. Weil diese Thetafunction für gleichzeitig verschwindende Argumente Null ist, verschwindet sie in der Fläche für $\zeta = \zeta_0$, und ausserdem für $\zeta = \alpha_i$, weil $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\alpha_i} du_1, \int_{\zeta_0}^{\alpha_i} du_2\right) = -\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_1, \int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_2\right)$ und diese sicher identisch im Bezuge auf $\zeta_0$ verschwindet. — Für $\zeta_0 = \alpha_i$ ist die Function sicher identisch Null in der Fläche. Dass aber für von $\alpha_i$ verschiedenes $\zeta_0$ niemals identisches Verschwinden eintreten kann, lässt sich auf folgende Art nachweisen:

$\zeta_0'$ sei von $\alpha_i$ verschieden und es verschwinde $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$ identisch. Dann hätte $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$ bei irgendwie fixirtem von $\alpha_i$ und $\zeta_0'$ verschiedenem $\zeta$ für variabel gedachtes $\zeta_0$ nicht blos die Nullstellen $\alpha_i$ und $\zeta$, sondern auch noch die Nullstelle $\zeta_0'$, oder es wäre $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$ Null, wie auch $\zeta$ und $\zeta_0$ gewählt seien.

Dies lässt sich sofort als unmöglich erkennen, wenn man die allgemeinen Untersuchungen über das Verschwinden der Thetafunctionen in der Riemann'schen Fläche voraussetzt:

Weil sich die beiden Congruenzen

$$\int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} du_1 + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} du_1 \equiv A_1 \qquad \int_{\varepsilon_1}^{\zeta_1} du_2 + \int_{\varepsilon_2}^{\zeta_2} du_2 \equiv A_2$$

nach S. 240 (20) bei beliebig gegebenen $A_1, A_2$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ stets befriedigen lassen, so sind auch die Bedingungen $\int_{\alpha_h}^{\zeta_1} du_1 + \int_{\alpha_h}^{\zeta_2} du_1 \equiv A_1, \int_{\alpha_h}^{\zeta_1} du_2 + \int_{\alpha_h}^{\zeta_2} du_2 \equiv A_2$ zu erfüllen; bezeichnet nun $\zeta_2'$ die dem Punkt $\zeta_2$ zugeordnete Stelle im anderen Blatt der zweiblättrigen Fläche, so hat man $\int_{\alpha_h}^{\zeta_2} du_\mu \equiv -\int_{\alpha_h}^{\zeta_2'} du_\mu$ und die letzten Bedingungen lassen sich durch

$$\int_{\zeta_2'}^{\zeta_1} du_1 \equiv A_1 \qquad \int_{\zeta_2'}^{\zeta_1} du_2 \equiv A_2$$

ersetzen. Die Thetafunction $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$ kann daher unmöglich für alle Punktpaare $\zeta_0, \zeta$ verschwinden, weil $\vartheta_{\beta_i}(v_1, v_2)$ nicht für alle Werthepaare $v_1, v_2$ verschwindet.*)

---

*) Ein zweites Beweisverfahren ist noch erwähnenswerth. Wäre $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$ identisch Null für jede Lage von $\zeta_0$ und $\zeta$, so hätte auch $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_h}^{\alpha_k} du_1, \int_{\alpha_h}^{\alpha_k} du_2\right)$ und damit $\vartheta_{\beta_i+\beta_h+\beta_k}(0,0)$ stets den Werth 0, und es verschwänden demnach nicht blos die sechs ungeraden Thetafunctionen, sondern alle Functionen $\vartheta_\gamma(v_1, v_2)$ für $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, weil jede gerade Charakteristik durch drei ungerade darstellbar ist, von denen eine beliebig gewählt werden kann. Dies lässt sich aber aus einer sehr leicht herzuleitenden Formel, welche bei Göpel (Crelle's Journal Bd. 35) die Grundlage für alle algebraischen Relationen zwischen Thetafunctionen bildet, als unmöglich erkennen, so dass dadurch auch erreicht ist, die jetzigen Untersuchungen über Thetafunctionen von zwei Variablen in der zweiblättrigen Fläche ganz unabhängig zu machen von früheren Untersuchungen über das identische Verschwinden von Thetafunctionen von $p$ Variablen in der Riemann'schen Fläche.

Die Formel ist folgende:

$$\vartheta^2\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}(v_1, v_2) = \sum_{0,1}^{\nu_1} \sum_{0,1}^{\nu_2} (-1)^{\sum_{1,2}^{\mu} h_\mu \cdot (g_\mu + \nu_\mu)} \cdot \Theta\begin{pmatrix} \nu_1 \nu_2 \\ 0\ 0 \end{pmatrix}(0,0) \cdot \Theta\begin{pmatrix} \nu_1+g_1, \nu_2+g_2 \\ 0 \qquad 0 \end{pmatrix}(2v_1, 2v_2)$$

wo $\Theta_\gamma$ die aus $\vartheta_\gamma$ durch Verdoppelung der Moduln $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ hervorgehende Function angiebt; der Specialfall $\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}$, der am leichtesten aus der Reihenentwickelung einleuchtet, genügt auch schon. Wären für ein gewisses Modulsystem alle geraden Thetafunctionen mit verschwindenden Argumenten Null, so wären für das durch Halbirung entstehende Modulsystem $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ die Functionen $\Theta\begin{pmatrix} \nu_1 \nu_2 \\ 0\ 0 \end{pmatrix}(0,0)$ Null und damit die linke Seite $\vartheta^2\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}(v_1, v_2)$ identisch 0 für beliebiges $v_1$, $v_2$, was undenkbar ist.

Hiermit ist erwiesen, dass $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$ nur in den beiden Flächenpunkten $\alpha_i$ und $\zeta_0$ verschwindet, wenn $\zeta_0$ von $\alpha_i$ verschieden ist, dagegen identisch verschwindet für $\zeta_0 = \alpha_i$.

Beiläufig sei bemerkt, dass daher für von einander und von $i$ verschiedene $h$ und $k$ die Function $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_h}^{\alpha_k} du_1, \int_{\alpha_h}^{\alpha_k} du_2\right)$ und damit $\vartheta_{\beta_i+\beta_h+\beta_k}(0,0)$ sicher von 0 verschieden ist, oder dass jede der zehn geraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente von 0 verschieden ist. Das ist ein an sich wichtiges Ergebniss, und man sieht daraus unter Anderem auch, dass für eine gerade Charakteristik $\gamma$ die Function $\vartheta_\gamma\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$ nicht identisch in der Fläche verschwinden kann, wie auch $\zeta_0$ liegt. Die beiden Nullstellen dieser Thetafunction lassen sich aber nicht so einfach finden, wie im Falle einer ungeraden Charakteristik; erst später kann ihre Bestimmung durchgeführt werden.

**§ 9.** Der Quotient aus zwei ungeraden Thetafunctionen

$$\frac{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)}$$

als Function von $\zeta$ betrachtet, ist Null im Punkt $\alpha_i$, unendlich in $\alpha_k$ und sonst überall von 0 und $\infty$ verschieden, auch in dem von $\alpha_i$ und $\alpha_k$ verschieden gedachten $\zeta_0$; an zusammengehörigen Stellen zu beiden Ufern eines Querschnitts unterscheiden sich die Functionswerthe noch theilweise dem Zeichen nach, wie die Periodeneigenschaften der Thetafunctionen lehren. Das Quadrat des Thetaquotienten ist demnach in der Fläche eindeutig und in zweiter Ordnung 0 in $\alpha_i$, in zweiter Ordnung $\infty$ in $\alpha_k$, unterscheidet sich also von $\frac{z-\alpha_i}{z-\alpha_k}$ nur um einen von $z$ nicht mehr abhängenden Factor, wenn $z$ das zum Flächenpunkt $\zeta$ gehörige complexe Argument ist. Wegen der Symmetrie für $\zeta$ und $\zeta_0$ folgt

$$\frac{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)} = C \cdot \sqrt{\frac{z_0 - \alpha_i}{z_0 - \alpha_k} \cdot \frac{z - \alpha_i}{z - \alpha_k}}.$$

$C$ ist unabhängig von $\zeta$ und $\zeta_0$, durch Einsetzen zweier von einander und von $\alpha_i$ und $\alpha_k$ verschiedener Verzweigungspunkte $\alpha_h$ und $\alpha_l$ kann man es — auf sechs verschiedene Arten, nachdem $\alpha_i$ und $\alpha_k$ einmal festgelegt sind — bestimmen, es folgt

$$\frac{\vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_1, \int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_1, \int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_2\right)} \cdot \frac{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)} = \sqrt{\frac{(\alpha_h - \alpha_k)(\alpha_l - \alpha_k)}{(\alpha_h - \alpha_i)(\alpha_l - \alpha_i)} \cdot \frac{(z_0 - \alpha_i)(z - \alpha_i)}{(z_0 - \alpha_k)(z - \alpha_k)}}.$$

Der erste Factor unterscheidet sich von $\frac{\vartheta_{\beta_k + \beta_h + \beta_l}(0,0)}{\vartheta_{\beta_i + \beta_h + \beta_l}(0,0)}$ um eine leicht zu bestimmende vierte Einheitswurzel.

Setzt man für $\zeta$ und $\zeta_0$ selbst Verzweigungspunkte ein, so kommt man nur zu zwei Typen von Formeln:

$$\frac{\vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_1, \int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_1, \int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_2\right)} \cdot \frac{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_m}^{\alpha_n} du_1, \int_{\alpha_m}^{\alpha_n} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\alpha_m}^{\alpha_n} du_1, \int_{\alpha_m}^{\alpha_n} du_2\right)} = \sqrt{\frac{(\alpha_h - \alpha_k)(\alpha_l - \alpha_k)}{(\alpha_h - \alpha_i)(\alpha_l - \alpha_i)} \cdot \frac{(\alpha_m - \alpha_i)(\alpha_n - \alpha_i)}{(\alpha_m - \alpha_k)(\alpha_n - \alpha_k)}}$$

$$\frac{\vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_1, \int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_1, \int_{\alpha_h}^{\alpha_l} du_2\right)} \cdot \frac{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_h}^{\alpha_m} du_1, \int_{\alpha_h}^{\alpha_m} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\alpha_h}^{\alpha_m} du_1, \int_{\alpha_h}^{\alpha_m} du_2\right)} = \sqrt{\frac{(\alpha_l - \alpha_k)}{(\alpha_l - \alpha_i)} \cdot \frac{(\alpha_m - \alpha_i)}{(\alpha_m - \alpha_k)}}.$$

Weil $\beta_i + \beta_m + \beta_n = \beta_k + \beta_h + \beta_l$ ist, so steht links in der ersten Formel bis auf eine in jedem speciellen Falle leicht bestimmbare Einheitswurzel vierten

Grades das Quadrat von $\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_k+\beta_l}(0,0)}{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_l}(0,0)}$ und man findet durch Quadriren

$$\pm\left(\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_k+\beta_l}(0,0)}{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_l}(0,0)}\right)^4=\frac{(\alpha_h-\alpha_k)(\alpha_l-\alpha_k)(\alpha_m-\alpha_i)(\alpha_n-\alpha_i)}{(\alpha_h-\alpha_i)(\alpha_l-\alpha_i)(\alpha_m-\alpha_k)(\alpha_n-\alpha_k)}$$

$$\pm\left(\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_k+\beta_l}(0,0)}{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_l}(0,0)}\cdot\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_m}(0,0)}{\vartheta_{\beta_h+\beta_k+\beta_m}(0,0)}\right)^2=\frac{(\alpha_l-\alpha_k)(\alpha_m-\alpha_i)}{(\alpha_l-\alpha_i)(\alpha_m-\alpha_k)},$$

wobei die Vorzeichen in jedem einzelnen Falle leicht zu bestimmen sind.

**§ 10.** Die Quotienten aus zwei geraden Thetafunctionen mit den Argumenten $\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta}du_2$ oder die Quotienten aus einer geraden und einer ungeraden Thetafunction sind auch Quadratwurzeln aus in der Fläche eindeutigen algebraischen Functionen. Da sich aber die Nullstellen einer geraden Thetafunction nicht so einfach finden lassen als die einer ungeraden, so muss zur Aufstellung dieser algebraischen Functionen ein ganz anderer Weg eingeschlagen werden.*)

$\gamma$ sei eine gerade Charakteristik, dann ist der Ausdruck $\left(\frac{\vartheta_\gamma(u_1,u_2)}{\vartheta_{\beta_h}(u_1,u_2)}\right)^2$, worin $u_1=\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_1, u_2=\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_2$ sei, eine algebraische Function des Punktes $\zeta$, welche in $\zeta_0$ und $\alpha_h$ in zweiter Ordnung unendlich wird und ebenso in zwei Punkten in zweiter Ordnung verschwindet. Multiplicirt man daher den Ausdruck mit $(z-z_0)^2.(z-\alpha_h)$, so erhält man eine neue algebraische Function, die im endlichen Gebiet der zweiblättrigen Fläche überall endlich ist, im Unendlichen in jedem Blatte unendlich wird wie $z^3$ und die in zweiter Ordnung verschwindet in den Nullstellen von $\vartheta_\gamma(u_1,u_2)$ und in dem Punkt $\zeta_0'$, welcher mit $\zeta_0$ dasselbe $z=z_0$ hat, aber im anderen Flächenblatt liegt. Bezeichnet man mit $r$ die Grösse $\sqrt{(z-\alpha_1).(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_6)}$ und mit $r_0$ ihren zu $\zeta_0$ gehörenden Werth, so ist $-r_0$ der Werth in $\zeta_0'$.

Weil die zuletzt eingeführte algebraische Function nur für $z=\infty$ unendlich wird, und zwar wie $z^3$, so muss sie in der Form $A.z^3+B.z^2+C.z+D+E.r$

*) Die folgende Betrachtung ist entnommen aus einer von Herrn Prof. H. Weber gehaltenen Vorlesung; einen zweiten Weg bietet der nächste Abschnitt.

enthalten sein. Wegen der paarweise zusammenfallenden Nullstellen muss der Ausdruck ein vollständiges Quadrat, d. h. von der Form $(C_1 . \sqrt{f_1(z)} + C_2 . \sqrt{f_2(z)})^2$ sein, wo $f_1(z)$ und $f_2(z)$ ganze Functionen dritten Grades von $z$ mit dem Product $r^2 = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_6)$ sind. Man kann daher schreiben

$$f_1(z) = (z-\alpha_h)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k) \qquad f_2(z) = (z-\alpha_l)(z-\alpha_m)(z-\alpha_n)$$

und findet so

$$\frac{\vartheta_\gamma\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_h}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)} = \frac{C_1 . \sqrt{(z-\alpha_h)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)} + C_2 . \sqrt{(z-\alpha_l)(z-\alpha_m)(z-\alpha_n)}}{(z-z_0) . \sqrt{z-\alpha_h}} .$$

Dabei hängen $C_1$ und $C_2$ noch von $z_0$ ab. Bei Vertauschung von $\zeta$ und $\zeta_0$ ändert die linke Seite ihr Zeichen; hierdurch bestimmen sich $C_1$ und $C_2$ bis auf einen gemeinsamen, von $\zeta_0$ unabhängigen Factor. Man findet für die rechte Seite der letzten Gleichung den Werth:

$$\text{const.} \frac{\sqrt{(z_0-\alpha_l)(z_0-\alpha_m)(z_0-\alpha_n)} . \sqrt{(z-\alpha_h)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)} + \sqrt{(z_0-\alpha_h)(z_0-\alpha_i)(z_0-\alpha_k)} . \sqrt{(z-\alpha_l)(z-\alpha_m)(z-\alpha_n)}}{(z-z_0) . \sqrt{z_0-\alpha_h} . \sqrt{z-\alpha_h}} .$$

[Da sich der Zähler in die Form bringen lässt

$$\frac{r_0 (z-\alpha_h)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k) + r . (z_0-\alpha_h)(z_0-\alpha_i)(z_0-\alpha_k)}{\sqrt{(z_0-\alpha_h)(z_0-\alpha_i)(z_0-\alpha_k)} . \sqrt{(z-\alpha_h)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)}},$$

so sieht man, dass er für $z, r = z_0, -r_0$ wirklich verschwindet, in erster Ordnung, dass also der Punkt $z_0, -r_0$ oder $\zeta_0'$ kein Unendlichkeitspunkt für die algebraische Function ist, wie es auch verlangt wurde.]

Es bleibt noch zu einer gegebenen Charakteristik $\gamma$ die richtige Zuordnung der Wurzelgrössen $\sqrt{(z-\alpha_h)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)}$ und $\sqrt{(z-\alpha_l)(z-\alpha_m)(z-\alpha_n)}$ zu finden. Dazu führt ein Vergleich der Vorzeichenänderungen der Wurzelgrössen und des Thetaquotienten an den Querschnitten der Fläche.

Nach der Beziehung zwischen $\frac{\vartheta_{\beta_i}(u_1, u_2)}{\vartheta_{\beta_k}(u_1, u_2)}$, wo $u_1 = \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1$, $u_2 = \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2$, und $\sqrt{\frac{z-\alpha_i}{z-\alpha_k}}$ besitzt dieser, in der zerschnittenen Fläche eindeutige Aus-

druck an den Querschnitträndern Werthe, die sich um folgende Factoren unterscheiden

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ (-1)^{g_1} & (-1)^{g_2} & (-1)^{h_1} & (-1)^{h_2} \end{matrix},$$

wenn $\beta_i+\beta_k = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$. [Das lässt sich auch direct aus Betrachtung der irrationalen Grösse in der Fläche aus einer Anzahl specieller Annahmen über $i$ und $k$ nachweisen.] Ebenso wie $\sqrt{\frac{z-\alpha_i}{z-\alpha_k}}$ verhält sich auch $(z-\alpha_k).\sqrt{\frac{z-\alpha_i}{z-\alpha_k}}$ oder $\sqrt{(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)}$. Die beiden Ausdrücke

$$\frac{\sqrt{(z-\alpha_h)\,(z-\alpha_i)\,(z-\alpha_k)}}{\sqrt{z-\alpha_h}} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{(z-\alpha_l)\,(z-\alpha_m)\,(z-\alpha_n)}}{\sqrt{z-\alpha_h}}$$

haben also an den Querschnitten beide das durch die Charakteristik $\beta_i+\beta_k$ gegebene Verhalten, denn $\beta_h+\beta_l+\beta_m+\beta_n$ ist wesentlich dieselbe Charakteristik wie $\beta_i+\beta_k$. Dasselbe Verhalten wie der algebraische Ausdruck

$$\frac{\sqrt{(z_0-\alpha_l)\,(z_0-\alpha_m)\,(z_0-\alpha_n)}\,.\,\sqrt{(z-\alpha_h)\,(z-\alpha_i)\,(z-\alpha_k)}+\sqrt{(z_0-\alpha_h)\,(z_0-\alpha_i)\,(z_0-\alpha_k)}\,.\,\sqrt{(z-\alpha_l)\,(z-\alpha_m)\,(z-\alpha_n)}}{(z-z_0)\,\sqrt{z_0-\alpha_h}\,.\,\sqrt{z-\alpha_h}}$$

besitzt aber der Quotient $\frac{\vartheta_\gamma(u_1,u_2)}{\vartheta_{\beta_h}(u_1,u_2)}$ für $\gamma=\beta_h+\beta_i+\beta_k$. Damit ist die Art der Zuordnung der Punkttripel $\alpha_h,\alpha_i,\alpha_k$ und $\alpha_l,\alpha_m,\alpha_n$ zu einer gegebenen Charakteristik $\gamma$ ganz bestimmt.

$$\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_1,\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_2\right)}{\vartheta_{\beta_h}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_1,\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_2\right)} =$$

$$= c\,.\,\frac{\sqrt{(z_0-\alpha_l)\,(z_0-\alpha_m)\,(z_0-\alpha_n)}\,.\,\sqrt{(z-\alpha_h)\,(z-\alpha_i)\,(z-\alpha_k)}+\sqrt{(z_0-\alpha_h)\,(z_0-\alpha_i)\,(z_0-\alpha_k)}\,.\,\sqrt{(z-\alpha_l)\,(z-\alpha_m)\,(z-\alpha_n)}}{(z-z_0)\,.\,\sqrt{z_0-\alpha_h}\,.\,\sqrt{z-\alpha_h}}.$$

Die Constante $c$ bestimmt sich durch Einsetzen von Verzweigungspunkten für $\zeta$ und $\zeta_0$ auf mehrfache Art, es darf nur der Punkt $\alpha_h$ nicht gewählt werden oder auch $\alpha_i$ und $\alpha_k$ nicht zugleich oder auch nicht zugleich zwei von Punkten $\alpha_l,\alpha_m,\alpha_n$; so giebt es sechs verschiedene Ausdrücke für $c$.

Für den Quotienten aus zwei geraden Thetafunctionen ist hiermit auch ein Ausdruck gefunden, nämlich

$$\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_1,\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_2\right)}{\vartheta_{\beta_{h'}+\beta_{i'}+\beta_{k'}}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_1,\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_2\right)}=$$

$$=c\cdot\frac{\sqrt{(z_0-\alpha_l)(z_0-\alpha_m)(z_0-\alpha_n)}\cdot\sqrt{(z-\alpha_h)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)}+\sqrt{(z_0-\alpha_h)(z_0-\alpha_i)(z_0-\alpha_k)}\cdot\sqrt{(z-\alpha_l)(z-\alpha_m)(z-\alpha_n)}}{\sqrt{(z_0-\alpha_{l'})(z_0-\alpha_{m'})(z_0-\alpha_{n'})}\cdot\sqrt{(z-\alpha_{h'})(z-\alpha_{i'})(z-\alpha_{k'})}+\sqrt{(z_0-\alpha_{h'})(z_0-\alpha_{i'})(z_0-\alpha_{k'})}\cdot\sqrt{(z-\alpha_{l'})(z-\alpha_{m'})(z-\alpha_{n'})}}.$$

Hier lässt sich die Constante $c$ sehr leicht finden, durch die Annahme $\zeta=\zeta_0$ erhält man $\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_k}(0,0)}{\vartheta_{\beta_{h'}+\beta_{i'}+\beta_{k'}}(0,0)}=c$.

**§ 11.** Während erst die Quadrate der aus zwei Thetafunctionen gebildeten Quotienten in der Riemann'schen Fläche eindeutig sind, kann man aus vier Thetafunctionen Quotienten bilden, die selbst schon eindeutig sind. Die Summe der vier Charakteristiken muss $\binom{0\,0}{0\,0}$ sein. So giebt es zu drei ungeraden Thetafunctionen immer eine ganz bestimmte gerade Thetafunction, derart, dass der aus den vier Functionen gebildete Quotient rational durch $z$, $r$ und $z_0$, $r_0$ ausdrückbar ist.

$$\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_1,\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_2\right)\cdot\vartheta_{\beta_h}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_1,\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_2\right)}{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_1,\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_2\right)\cdot\vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_1,\int_{\zeta_0}^{\zeta}du_2\right)}$$

ist eine algebraische Function dritter Ordnung mit den einfachen Unendlichkeitsstellen $\alpha_i,\alpha_k$ und $\zeta_0$, zu den drei Nullstellen gehört $\alpha_h$. Hieraus lässt sich die Function völlig bestimmen, man setzt sie in der Form $\frac{A\,.\,r+\varphi(z)}{(z-z_0)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)}$ an, wo $\varphi(z)$ eine ganze Function dritten Grades von $z$ ist. Der Zähler muss für $z=\alpha_i$ Null werden wie $\sqrt{z-\alpha_i}$, für $z=\alpha_k$ Null werden wie $\sqrt{z-\alpha_k}$, damit der Ausdruck in $\alpha_i$ und $\alpha_k$ nur in erster Ordnung unendlich wird; weiter muss der Zähler für $z=\alpha_h$ verschwinden wie $\sqrt{z-\alpha_h}$. Das liefert $\varphi(z)=B\,.\,(z-\alpha_h)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)$. $A$ und $B$ hängen noch von $z_0$, $r_0$ ab und bestimmen sich bis auf einen gemeinsamen Factor daraus, dass für $z=z_0$, $r=-r_0$ der ganze Ausdruck endlich bleiben, der Zähler also ver-

schwinden muss. Es darf der ganze Ausdruck aber nur sein Zeichen ändern bei Vertauschung von $z, r$ mit $z_0, r_0$, das bestimmt den in $B$ und $A$ gemeinsamen Bestandtheil bis auf eine von $z_0, r_0$ unabhängige Constante, und man findet:

$$\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right) \cdot \vartheta_{\beta_h}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right) \cdot \vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)} =$$

$$= \text{const} \cdot \frac{(z_0-\alpha_h)(z_0-\alpha_i)(z_0-\alpha_k) \cdot r + (z-\alpha_h)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k) \cdot r_0}{(z-z_0) \cdot (z_0-\alpha_i)(z_0-\alpha_k)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)} =$$

$$= \text{const} \cdot \frac{1}{z-z_0} \cdot \left( \frac{(z_0-\alpha_h) \cdot r}{(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)} + \frac{(z-\alpha_h) \cdot r_0}{(z_0-\alpha_i)(z_0-\alpha_k)} \right).$$

Natürlich hätte man diese Gleichung auch aus den früheren Formeln über Quotienten aus zwei Thetafunctionen ableiten können, aber diese selbstständige Herleitung ist so einfach, dass man die Ausdrucksform des Quotienten aus einer geraden und einer ungeraden Thetafunction doch am kürzesten aus dieser Formel und der Formel für den Quotienten aus zwei ungeraden Thetafunctionen findet.

Die Constante in der letzten Gleichung ist durch Einsetzen von Verzweigungspunkten für $\zeta$ und $\zeta_0$ nicht zu finden, weil dabei stets $0=0$ entsteht, oder $\infty=\infty$. Aber die Constante ist das Product der beiden Constanten, die in den Ausdrücken für $\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_k}(u_1, u_2)}{\vartheta_{\beta_i}(u_1, u_2)}$ und $\frac{\vartheta_{\beta_h}(u_1, u_2)}{\vartheta_{\beta_k}(u_1, u_2)}$ auftreten, und diese sind auf die genannte Art bestimmbar.

Es giebt noch einige Typen von Quotienten aus vier Thetafunctionen, die in der Fläche eindeutig sind, aber sie lassen sich alle aus den bisher gefundenen Formeln ohne Weiteres ableiten und sind so ohne besonderes Interesse.

**§ 12.** Bei der Untersuchung der Frage nach dem identischen Verschwinden von $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$ ist schon gezeigt worden, dass sich durch geeignet gewählte Punkte $\zeta_0$ und $\zeta$ die beiden Bedingungen

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1 \equiv A_1 \qquad\qquad \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2 \equiv A_2$$

stets befriedigen lassen, wie auch $A_1$ und $A_2$ gegeben sind.*) Dabei ist aber zu beachten, dass die Lösung keine eindeutige mehr ist, wie beim Jakobi'schen Umkehrproblem, sondern stets eine zweideutige, falls sie nicht etwa unendlich-vieldeutig ist. Denn bezeichnet man mit $\zeta'$ und $\zeta_0'$ diejenigen Punkte, welche mit $\zeta$ resp. $\zeta_0$ dasselbe $z$ aber entgegengesetztes $r$ besitzen, so ist $\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_\mu + \int_{\zeta_0'}^{\zeta'} du_\mu \equiv 0$, weil man zwei ganz gleichartige Integrationswege, die

---

*) Setzt man den durch die Anmerkung auf S. 252 (32) selbständig bewiesenen Satz voraus, dass $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$ für $\zeta_0 \neq \alpha_i$ nur in $\alpha_i$ und $\zeta_0$, für $\zeta_0 = \alpha_i$ aber identisch verschwindet, so gelangt man zu obenstehendem Satz unter Benutzung nur eines kleinen Theiles der Untersuchungen des Art. 5, und Manches lässt sich dabei noch wesentlich vereinfachen.

1) Hat $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_i}^{\zeta} du_1 - e_1, \int_{\alpha_i}^{\zeta} du_2 - e_2\right)$ die beiden Nullstellen $\eta_1$ und $\eta_2$, so findet man in der Riemann'schen Formel $e_\mu \equiv \sum_{1,2}^{\nu} \int_{\alpha_i}^{\eta_\nu} du_\mu + k_\mu$ sofort $k_\mu \equiv 0$ aus der speciellen Annahme $e_\mu = \int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_\mu, \zeta_0 \neq \alpha_i$, wofür die Thetafunction in $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)$ übergeht, d.h. nur in $\zeta_0$ und $\alpha_i$ verschwindet. Bei nicht identisch verschwindendem $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_i}^{\zeta} du_1 - e_1, \int_{\alpha_i}^{\zeta} du_2 - e_2\right)$ ist also die Darstellung $e_\mu \equiv \sum_{1,2}^{\nu} \int_{\alpha_i}^{\eta_\nu} du_\mu$ möglich durch die Nullstellen der Function, und diese Darstellung ist nach Sätzen über algebraische Functionen und dem Abel'schen Theorem völlig eindeutig, weil die Nullstellen $\eta_1, \eta_2$ gewiss nicht zusammengehörige Punkte in den beiden Blättern der Fläche sind, was ja zu $e_1 \equiv 0$, $e_2 \equiv 0$ führen würde, und so einer nicht identisch verschwindenden Thetafunction widerspricht.

2) Verschwindet $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_i}^{\zeta} du_1 - e_1, \int_{\alpha_i}^{\zeta} du_2 - e_2\right)$ identisch, so könnte erstens bei passendem $\zeta_0 \neq \alpha_i$ die Function $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_i}^{\zeta} du_1 - \int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_1 - e_1, \int_{\alpha_i}^{\zeta} du_2 - \int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_2 - e_2\right)$ nicht identisch,

nur in den verschiedenen Blättern verlaufen, zu Grunde legen darf, und es bestehen so neben den Congruenzen $\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1 \equiv A_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2 \equiv A_2$ auch noch die anderen $\int_{\zeta'}^{\zeta_0'} du_1 \equiv A_1, \int_{\zeta'}^{\zeta_0'} du_2 \equiv A_2$.

Von dieser Zweideutigkeit abgesehen ist die Lösung der simultanen Bedingungen

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1 \equiv A_1 \qquad \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2 \equiv A_2$$

immer eine ganz bestimmte, wenn $A_1$ und $A_2$ nicht beide Null sind. Denn die

---

d. h. nur für $\eta_1 = \alpha_i$ (wegen $-\int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_\mu \equiv +\int_{\alpha_i}^{\zeta_0'} du_\mu$, falls $\zeta_0$ und $\zeta_0'$ gemeinsames $z$ und entgegengesetztes $r$ haben) und für $\eta_2 = \zeta_0$ verschwinden; für $\sum_{1,2}^{\nu} \int_{\alpha_i}^{\eta_\nu} du_\mu$ oder $\int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_\mu$ folgte dann der Werth $\int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_\mu + e_\mu$, also nur für $e_1 \equiv 0$, $e_2 \equiv 0$ tritt dieser Fall ein. Zweitens könnte $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_i}^{\zeta} du_1 - \int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_1 - e_1, \int_{\alpha_i}^{\zeta} du_2 - \int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_2 - e_2\right)$ bei beliebigen $\zeta$ und $\zeta_0$ verschwinden, dann wäre auch $\vartheta_{\beta_i}\left(-\int_{\alpha_i}^{\zeta'} du_1 - \int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_1 - e_1, -\int_{\alpha_i}^{\zeta'} du_2 - \int_{\alpha_i}^{\zeta_0} du_2 - e_2\right)$ stets 0, wo $\zeta'$ den Punkt bezeichnet, der im anderen Flächenblatt über oder unter $\zeta$ liegt, oder es verschwände $\vartheta_{\beta_i}\left(+\sum_{1,2}^{\nu} \int_{\alpha_i}^{c_\nu} du_1 + e_1, +\sum_{1,2}^{\nu} \int_{\alpha_i}^{c_\nu} du_2 + e_2\right)$ für jedes Punktpaar $c_1, c_2$. Das ist aber nicht möglich, denn es giebt gewiss Werthepaare $C_1, C_2$, für die nicht bloss $\vartheta_{\beta_i}(C_1 + e_1, C_2 + e_2)$, sondern auch $\vartheta_{\beta_i}(C_1, C_2)$ von Null verschieden ist, und weil dann $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_i}^{\zeta} du_1 - C_1, \int_{\alpha_i}^{\zeta} du_2 - C_2\right)$ in $\alpha_i$ nicht verschwindet, hat diese Function zwei Nullstellen $c_1, c_2$, durch welche $C_1$ und $C_2$ in der Form $C_\mu \equiv \sum_{1,2}^{\nu} \int_{\alpha_i}^{c_\nu} du_\mu$ darstellbar sind.

Daraus ersieht man, dass $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\alpha_i}^{\zeta} du_1 - e_1, \int_{\alpha_i}^{\zeta} du_2 - e_2\right)$ nur für $e_1 \equiv 0$, $e_2 \equiv 0$ identisch verschwinden kann. Und in diesem Falle sind $e_1, e_2$ auch in der Form $e_\mu \equiv \sum_{1,2}^{\nu} \int_{\alpha_i}^{\eta_\nu} du_\mu$

nach den allgemeinen Betrachtungen stets mögliche Darstellung $A_\mu \equiv \sum_{1,2}^{\nu} \int_{\alpha_h}^{\zeta_\nu} du_\mu$ ist nur dann eine vieldeutige — nach dem Abel'schen Theorem — wenn $\zeta_1$ und $\zeta_2$ Punkte sind, in denen eine algebraische Function der Ordnung $p = 2$, d. h. eine Function $\frac{az+b}{cz+d}$, denselben Werth besitzt, also wenn $\zeta_1$ und $\zeta_2$ zusammengehörige Punkte in den beiden Blättern der Fläche sind; dann ist aber $\sum_{1,2}^{\nu} \int_{\alpha_h}^{\zeta_\nu} du_\mu \equiv 0$.

Die beiden Bedingungen

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1 \equiv A_1 \qquad\qquad \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2 \equiv A_2$$

lassen, wenn $A_1$ und $A_2$ nicht beide Null sind, eine zweideutig bestimmte Lösung zu, die sich aus den aufgestellten Formeln über Thetaquotienten ohne Weiteres finden lässt. Irgend zwei von den Gleichungen

$$\left( \frac{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)} \right)^2 = c_{ik} \cdot \frac{(z_0 - \alpha_i)\,(z - \alpha_i)}{(z_0 - \alpha_k)\,(z - \alpha_k)}$$

bestimmen $z_0 . z$ und $z_0 + z$ eindeutig, woraus für $z_0$ und $z$ ein bestimmtes Werthepaar folgt. Wählt man dann eine der beiden Lösungen für $z_0$ und $z$ aus, so folgen aus irgend zwei Gleichungen der Form

---

darstellbar, wo jetzt aber $\eta_1$, $\eta_2$ irgend zwei übereinander liegende Punkte in der zweiblättrigen Fläche sind.

3) Die Frage nach dem Verschwinden von $\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_1 - e_1, \int_{\varepsilon}^{\zeta} du_2 - e_2\right)$ ist hiermit auch gelöst; die $k_\mu$ sind hier nicht (bis auf ganze Perioden) gleich 0, sondern man findet sofort $k_\mu \equiv -\int_{\varepsilon}^{\alpha_i} du_\mu$. Und wegen der Beziehung zwischen Thetafunctionen verschiedener Charakteristiken sind die Sätze auf $\vartheta_\gamma\left(\int_{\varepsilon}^{\zeta} du_1 - e_1, \int_{\varepsilon}^{\zeta} du_2 - e_2\right)$ wo $\gamma$ eine gerade Charakteristik ist, auch leicht zu übertragen.

$$\frac{\vartheta_{\beta_h+\beta_i+\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right) \cdot \vartheta_{\beta_h}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)}{\vartheta_{\beta_i}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right) \cdot \vartheta_{\beta_k}\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} du_1, \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_2\right)} =$$

$$= \text{const} \cdot \left\{ \frac{z_0 - \alpha_h}{(z-z_0)(z-\alpha_i)(z-\alpha_k)} \cdot r + \frac{z-\alpha_h}{(z-z_0)(z_0-\alpha_i)(z_0-\alpha_k)} \cdot r_0 \right\}$$

eindeutig bestimmte Werthe für $r$ und $r_0$ (und man sieht auch leicht, dass bei der anderen Wahl von $z$ und $z_0$ sich die Werthe von $r$ und $r_0$ unter einander vertauschen und gleichzeitig ihre Zeichen umkehren, wie auch die vorausgeschickte allgemeine Bemerkung über die Zweideutigkeit des Problems zeigte). — Es kann natürlich vorkommen, dass ein Quotient $\frac{\vartheta_{\beta_i}(A_1, A_2)}{\vartheta_{\beta_k}(A_1, A_2)}$ Null oder unendlich ist; die Gleichung, in der er auftritt, bleibt dann doch brauchbar und zeigt, dass $z$ oder $z_0$ gleich einem Verzweigungswerth ist, das zugehörige $r$ ist dann Null und das $r$ des anderen Punktes findet man aus einer einzigen Gleichung, in der links vier Thetafunctionen auftreten, wobei freilich nicht jede beliebige solche Gleichung brauchbar ist, weil einige sich auf $0 = 0$ oder $\infty = \infty$ reduciren. — Nimmt aber ein Quotient $\frac{\vartheta_{\beta_i}(A_1, A_2)}{\vartheta_{\beta_k}(A_1, A_2)}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, ohne dass $A_1$ und $A_2$ beide Null sind, so verliert allerdings die Gleichung für $z_0$ und $z$, in der er auftritt, ihren Sinn, aber andere Gleichungen und auch einfache Betrachtungen aus der Theorie des Verschwindens der Thetafunctionen zeigen, dass dann die Punkte $\zeta$ und $\zeta_0$ in die Verzweigungspunkte $\alpha_i$ und $\alpha_k$ fallen. — Im Ausnahmefall $A_1 = 0, A_2 = 0$ endlich werden die Bedingungen $A_\mu \equiv \int_{\zeta_0}^{\zeta} du_\mu$ nur durch beliebige Paare zusammenfallender Punkte gelöst.

Geboren wurde ich zu Kassel am 2. October 1864. Mein Vater, Reinhard von Dalwigk, siedelte nach einigen Jahren als Gymnasialprofessor nach Coburg über, wo er 1878 starb. Von Herbst 1878 bis Ostern 1885 besuchte ich das Kasseler Realgymnasium. Dann studirte ich in Marburg Mathematik, Physik und Geographie und setzte von Herbst 1889 an die mathematischen Studien in München fort. Im Frühjahr 1891 begab ich mich zum Doctorexamen nach Marburg. Für die Anregung zur vorliegenden Arbeit und für das Interesse, welches er derselben entgegenbrachte, bin ich meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. Weber in Marburg, zu besonderem Dank verpflichtet.

Berlin, im December 1891.

**Friedrich von Dalwigk.**